

Université de Sherbrooke
Faculté des sciences appliquées
Département de génie mécanique

Vibrations de flexion des plaques

Rapport

Luc Jaouen

20 mars 2002

Table des matières

1	Théorie des plaques minces	1
1.1	Hypothèses	1
1.2	Champs de déplacement	1
2	Théorie des plaques épaisses	3
2.1	Hypothèses	3
2.2	Champs de déplacement	3
2.3	Relations contraintes-déformations	4
2.4	Fonctions d'énergies	5
2.5	Equations du mouvement	5
2.6	Notes sur κ^2	6
3	Plaque multicouche	8
3.1	Flexion pure	8
3.2	Modèle de flexion et cisaillement	9
	Bibliographie	11

Chapitre 1

Théorie des plaques minces

La vibration en flexion des plaques est modélisée par essentiellement deux théories (hors théorie des milieux continus) : celle des plaques minces exposée dans ce chapitre et celle des plaques épaisses traitée au chapitre suivant.

La théorie des plaques minces énoncée par LOVE [5] sur les hypothèses de KIRCHHOFF s'inspire de celle des poutres minces de Euler-Bernoulli.

1.1 Hypothèses

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par KIRCHHOFF généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.
- La contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout z .

1.2 Champs de déplacement

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme (*cf* figure 2.1) :

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.1a)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.1b)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (1.1c)$$

où x , y et z sont les coordonnées d'un point de la plaque dans un repère cartésien et galiléen. t est la variable temps

L'écriture de l'équation du mouvement de flexion de la plaque, (w), dans l'approximation de l'élasticité linéaire aboutit à :

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (1.2)$$

où D représente le module de rigidité en flexion, h l'épaisseur de la plaque, ρ la masse volumique du matériau constituant la plaque, f la force imposée et enfin ∇ l'opérateur : $(\partial/\partial x + \partial/\partial y)$

Cette équation est à mettre en relation avec celle obtenue pour le mouvement en flexion des poutres d'Euler-Bernoulli :

$$EI\nabla^4 w + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (1.3)$$

où E est le module d'Young du matériau utilisé, I le moment quadratique de la section S de la poutre considérée.

Du fait de l'opérateur du quatrième ordre et du signe + entre les termes du membre de gauche, il ne s'agit pas d'une équation d'onde. En conséquence, les vibrations de flexion transmises dans une poutre ou une plaque seront par nature dispersives (la vitesse de propagation est fonction de la fréquence).

Dans le cas d'une plaque simplement supportée sur tous ces bords, en régime de temps harmonique, le déplacement transversal $w(x, y, t)$ est de la forme :

$$w(x, y, t) = w_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t) \quad (1.4)$$

où ω est la pulsation, k_x et k_y sont les nombres d'ondes associés aux directions (Ox) et (Oy) , liés au nombre d'onde k par la relation : $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

En faisant usage de l'équation (1.2), sans terme force, et en utilisant l'expression du déplacement $w(x, y, t)$ précédente, on peut écrire l'équation de dispersion pour cette plaque mince simplement supportée comme :

$$\omega^2 = k^4 \frac{D}{\rho h} \quad (1.5)$$

Chapitre 2

Théorie des plaques épaisses

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (*ie* elle n'est plus très petite devant la dimensions des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de TIMOSHENKO est nécessaire.

RAYLEIGH [7] en 1877 puis TIMOSHENKO [11, 12] en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système.

Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposé par REISSNER [9] en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par UFLYAND [13] en 1948. C'est cependant l'article de MINDLIN [6], publié 3 ans plus tard qui fera date.

2.1 Hypothèses

Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points 1 et 4 de celles de Kirchhoff (cf §1.1).

Les points 2 et 3 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets.

2.2 Champs de déplacement

Dans la théorie des plaques de Reissner-Mindlin [6], les composantes des champs de déplacement sont définies comme (*cf* figure 2.1) :

$$u(x, y, z, t) = -z\psi_x(x, y, t) \quad (2.1a)$$

$$v(x, y, z, t) = -z\psi_y(x, y, t) \quad (2.1b)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (2.1c)$$

où t représente la variable temps, u et v sont les déplacements dans le plan de la plaque, w est le déplacement transverse et enfin ψ_x , ψ_y les rotations en flexion de normales transverses aux axes x et y .

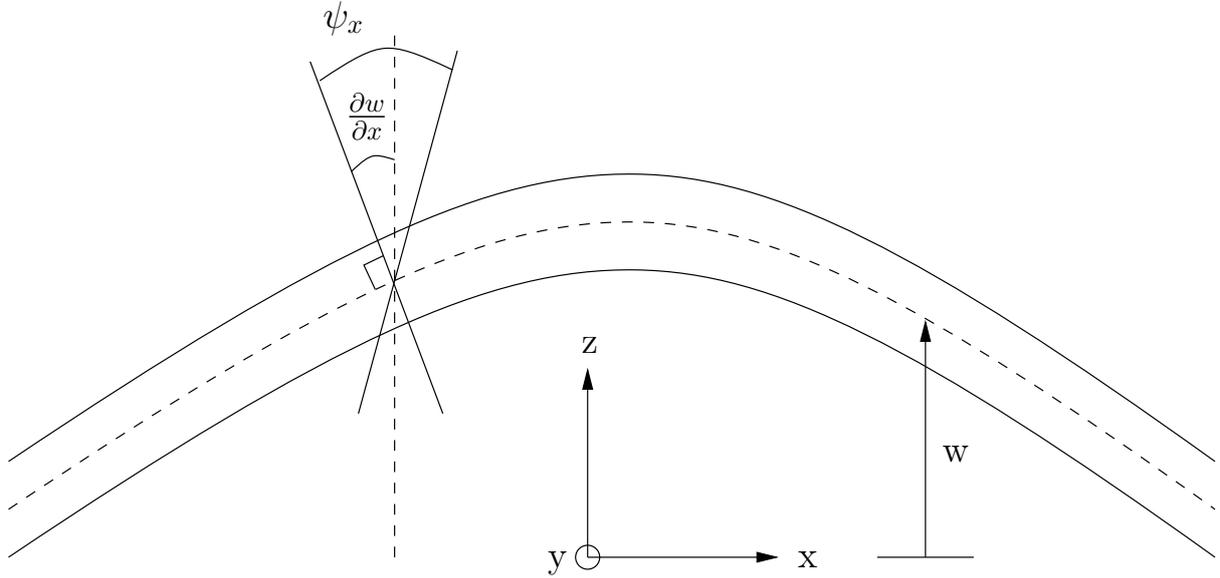


FIG. 2.1 – Schéma des déplacements pour la théorie des plaques de Mindlin

2.3 Relations contraintes-déformations

D'après les 3 relations du système (2.1), les expressions linéaires des déformations s'écrivent :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (2.2a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (2.2b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2c)$$

$$\tau_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (2.2d)$$

$$\tau_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2e)$$

$$\tau_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2f)$$

2.4 Fonctions d'énergies

L'énergie de déformation due à au mouvement de flexion de la plaque est donnée en fonction des tenseurs de contraintes σ et de déformations ε :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV \quad (2.3)$$

soit en utilisant les relations contraintes-déformations précédentes, les hypothèses des champs de déformations et la loi constitutive de Hooke pour un matériau isotrope et homogène :

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left[D \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \kappa^2 Gh \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right)^2 \right\} \right] dA \quad (2.4)$$

κ^2 est le facteur correcteur de cisaillement qui fait l'objet du paragraphe 2.6.

L'énergie cinétique de la plaque s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (2.5)$$

en explicitant les champs de déformation et en intégrant sur l'épaisseur h de la plaque, on obtient finalement :

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] dA \quad (2.6)$$

2.5 Equations du mouvement

L'écriture du principe de Hamilton, d'après les fonctions énergétiques obtenues en (2.4) et (2.6), appliqué aux plaques épaisses libres, aboutit aux équations de mouvements :

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \psi_x + (1 + \nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right] \\ - \kappa^2 Gh \left(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \psi_y + (1 + \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right] \\ - \kappa^2 Gh \left(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\kappa^2 Gh \left(\nabla^2 w - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

où les termes $\partial^2 \psi_i / \partial t^2$ ($i = x, y$) des équations (2.7) et (2.8) représentent les termes d'inertie de rotation.

De ces équations, on peut aisément retrouver les équations des plaques minces (cf eq. 1.1) en posant comme conditions sur les déplacements :

$$\psi_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.10a)$$

$$\psi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.10b)$$

$$\kappa^2 \rightarrow \infty \quad (2.10c)$$

et en négligeant les termes liés à l'inertie de rotation.

2.6 Notes sur κ^2

κ^2 (où κ suivant les auteurs) est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement σ_{zx} et σ_{zy} constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de MINDLIN [6] (cf 2.1), en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres.

MINDLIN trouve ce facteur dépendant du coefficient de Poisson ν et variant de 0.76 pour $\nu = 0$ à 0.91 pour $\nu = 0.5$ dans le cas d'un matériau isotrope. En suivant cette observation et en choisissant κ^2 de façon à égaler la fréquence du premier mode antisymétrique de cisaillement d'une plaque isotrope, infinie déterminée par l'exacte théorie de l'élasticité et la théorie de Mindlin, on peut montrer que le facteur κ^2 est solution d'une équation polynomiale d'ordre 3 ([4]) telle que :

$$\kappa^2 = 0.86 \quad \text{si} \quad \nu = 0.300 \quad \text{et} \quad \kappa^2 = \pi^2/12 \quad \text{si} \quad \nu = 0.176 \quad (2.11)$$

WITTRICK en 1987 [14] propose une approximation de κ^2 dans le cas d'une plaque simplement supportée :

$$\kappa^2 = \frac{5}{(6 - \nu)} \quad (2.12)$$

On peut noter qu'en comparant les résultats de MINDLIN et REISSNER [9], qui suppose une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, on obtient pour expression de κ^2 : 5/6.

A ce jour, la facteur κ^2 , lorsqu'il est utilisé, est toujours sujet à discussion. L'ensemble des auteurs s'accordent cependant pour juger de son influence sur les résultats. (cf Y.Y.YU[15, 1]).

D'autres théories ne nécessitant pas de facteur de correction ont été proposées, notamment par J. N. REDDY [8] qui utilise une interpolation polynomiale du troisième ordre pour la déformation en cisaillement. Ces théories d'ordres supérieurs impliquent cependant une mise en oeuvre difficile par rapport au faible gain de précision sur les résultats.

Chapitre 3

Plaque multicouche

3.1 Flexion pure

Le modèle de plaque équivalente de Ross-Kerwin-Ungar (RKU)[10], couramment utilisé dans l'étude vibratoire de multicouches visco-élastiques, est basé sur la théorie des plaques minces.

Appliqué à un bicouche, on écrit pour hypothèse que l'épaisseur h_1 de la première couche est supposée faible devant celle de la couche supérieure h_2 . Négliger l'épaisseur h_1 devant h_2 impose aux champs de déplacements de cette dernière couche des expressions similaires à celles de la première. L'origine des cotes - axe (Oz) - est alors le plan neutre de la 1^{ère} couche, les modules de rigidités des deux matériaux D_1 et D_2 doivent être calculés par rapport à ce plan neutre (*cf* fig. 3.1). Mathématiquement, tout se passe comme si le bicouche se comportait comme une plaque homogène de masse et de module de rigidité modifiés :

- La rigidité de flexion complexe D_{12} est la somme des rigidités de flexion des deux couches calculées avec respect par rapport à la position du plan neutre :

$$D_{12} = D_1 + D_2 \quad (3.1)$$

ceci implique notamment, par égalité des parties réelle et imaginaire, que l'amortissement structural total s'écrit comme :

$$\eta_{12} = \frac{\eta_1 \operatorname{Re}(D_1) + \eta_2 \operatorname{Re}(D_2)}{\operatorname{Re}(D_1) + \operatorname{Re}(D_2)} \quad (3.2)$$

avec

$$D_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \int_{-d_1/2}^{d_1/2} z^2 dz \quad (3.3)$$

$$D_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \int_{d_1/2}^{d_1/2+d_2} z^2 dz \quad (3.4)$$

- La masse volumique du système traduit l'associativité des masses de chaque couche :

$$\rho_{12} = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h_1 + h_2} \quad (3.5)$$

où D_n désigne le module de rigidité en flexion du matériau de la couche n , de masse volumique ρ_n . h_n dénote l'épaisseur de la couche n .

Ce modèle équivalent visco-élastique simple atteint ses limites lorsque la seconde couche est d'épaisseur non négligeable par rapport à la première (on sort de l'hypothèse principale de calcul). La position en fréquence des résonances ainsi que le facteur de pertes η_{12} , sont surestimés. Pour remédier à ce désagrément, la prise en compte du cisaillement dans la seconde couche doit être faite. DAUCHEZ *et al.*[3, 2] en donnent un exemple appliqué à l'étude d'un système plaque d'aluminium + plaque d'un matériau poro-élastique.

3.2 Modèle de flexion et cisaillement

Le développement de DAUCHEZ l'amène à réécrire le module de rigidité en flexion du système comme :

$$D_{12} = D_1 + D_2 C_s(k^2) \quad (3.6)$$

où $C_s(k^2)$ est un facteur de correction des effets du cisaillement sur le module de rigidité en flexion. Ce facteur dépendant du nombre d'onde, il dépend également de la fréquence.

Cette modification du module de rigidité affecte directement l'expression du facteur de perte structural du système η_{12} , défini comme le rapport de la partie imaginaire sur la partie réelle du module de flexion. Des calculs plus détaillés sont regroupés dans un rapport interne au GAUS remis par S. RIGOBERT et daté du 17.06.1998

La nouvelle relation de dispersion du système dans le cas d'une plaque équivalente simplement supportée s'écrit comme :

$$\omega^2 = k^4 \frac{D_{12}}{\rho_{12}(h_1 + h_2)} C_s(k^2) \quad (3.7)$$

elle est à mettre en relation avec l'équation (1.5) de dispersion typique pour une plaque mince.

On peut montrer que C_s est inférieur à 1. Son effet est donc, comme attendu, de diminuer les positions en fréquences des résonances du système.

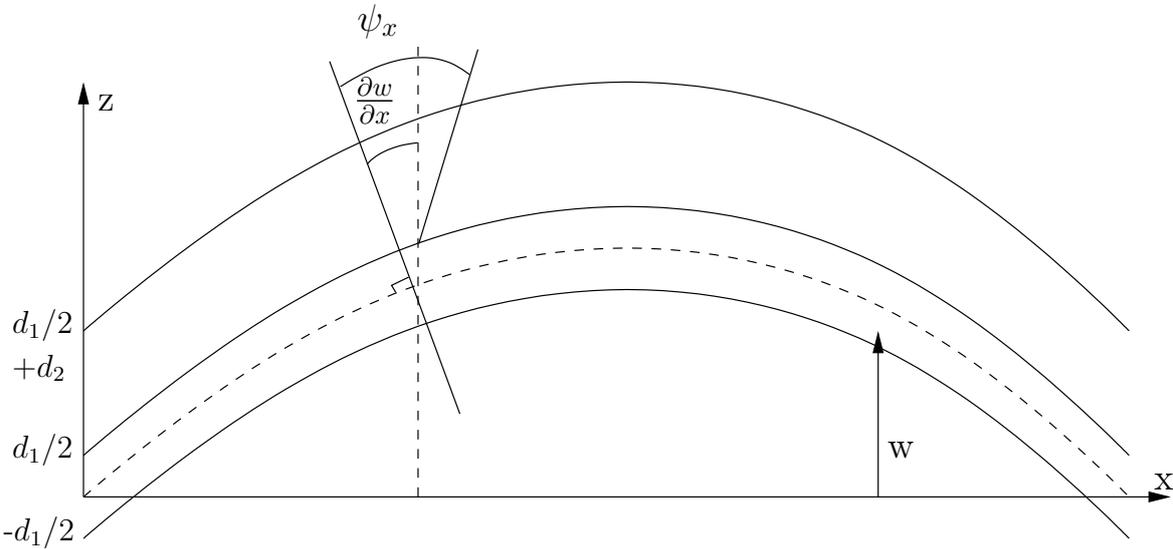


FIG. 3.1 – Schéma des déplacements pour un bicouche

Bibliographie

- [1] BERTHELOT J.-M. *Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures, 3^e édition*. Technique & Documentation 1999.
- [2] DAUCHEZ N. *Etude vibroacoustique des matériaux poreux par éléments finis*. Thèse de Doctorat Université du Maine/Université de Sherbrooke Avril 1999.
- [3] DAUCHEZ N., SAHRAOUI S., ATTALA N. Dissipation mechanisms in a porous layer bonded onto a plate. *J. of Sound and Vibration*, 2003, Vol. 265 p. 437–449.
- [4] LIEW K. M., WANG C. M., XIANG Y., KITIPORCHAI S. *Vibrations of Mindlin plates, programming the p-version Ritz method*. Elsevier 1998.
- [5] LOVE A. E. H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical trans. of the Royal Society (London)*, 1888, Vol. série A, N^o 17 p. 491–549.
- [6] MINDLIN R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1951, Vol. 18 p. 31–38.
- [7] RAYLEIGH L. *Theory of sound, Vol I et Vol. II*. Dover Pub. 1945.
- [8] REDDY J. N. *Energy and variational methods in applied mechanics*. John Willey and Sons 1984.
- [9] REISSNER E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. of Appl. Mech.*, 1945, Vol. 12 p. A69–A77.
- [10] ROSS R., UNGAR E., KERWIN E. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate. *Structural Damping, Proceedings of ASME, New York*, 1959.
- [11] TIMOSHENKO S. On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 1921, Vol. 41 (series 6) p. 744–746.
- [12] TIMOSHENKO S. On on the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine*, 1922, Vol. 43 (series 6) p. 125–131.
- [13] UFLYAND Y. S. The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates. *Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech.*, 1948, Vol. 12 p. 287–300.
- [14] WITTRICK W. H. Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems and some observations on mindlin's plate theory. *J. of Applied Mechanics*, 1987, Vol. 23 p. 441–464.
- [15] YU Y. Y. *Vibrations of elastic plates*. Springer 1995.