

# Vibrations des milieux discrets et continus

Luc JAOUEN

Version datée du 19 avril 2005



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>iii</b>
<b>1 Un Degré De Liberté</b>	<b>1</b>
1.1 Oscillations libres	1
1.2 Réponse à une excitation harmonique	3
1.3 Théorème de superposition	3
1.4 Réponse à une excitation périodique quelconque	4
1.5 Réponse à une excitation quelconque	5
<b>2 n degrés de liberté</b>	<b>9</b>
2.1 Méthode de la base modale	9
2.2 Systèmes avec amortissement visqueux	11
2.3 Réponses forcées	12
<b>3 Vibration transversale des cordes</b>	<b>13</b>
<b>4 Vibrations des poutres</b>	<b>19</b>
4.1 Définition d'une poutre	19
4.2 Vibrations longitudinales	20
4.2.1 Champ de déplacement	20
4.2.2 Fonctionnelle de Hamilton	21
4.3 Vibrations de flexion	23
4.3.1 Champ de déplacement	23
4.3.2 Fonctionnelle de Hamilton	24
4.4 Vibrations de torsion	26
4.4.1 Champ de déplacement	26
4.4.2 Fonctionnelle de Hamilton	27
<b>5 Vibrations des plaques</b>	<b>29</b>
5.1 Définition d'une plaque	29
5.2 Hypothèses de condensation	29
5.3 Vibrations longitudinales des plaques minces	30
5.4 Vibrations de flexion des plaques minces	30
5.4.1 Champ de déplacement	30
5.4.2 Fonctionnelle de Hamilton	31
<b>6 Introduction à l'analyse modale</b>	<b>35</b>
6.1 Définition de l'analyse modale	35
6.2 Théorème de réciprocité	35
6.3 Différentes formes de FRF	36
6.4 Estimateurs de FRF	36
6.5 Amortissements visqueux et structural	37
6.6 Méthodes d'extraction de paramètres	38
6.7 Exemple : cas d'une poutre en flexion	39

<b>A Formalisme de Lagrange et équations d'Euler</b>	<b>43</b>
A.1 Rappel sur le formalisme de Lagrange . . . . .	43
A.2 Equations d'Euler . . . . .	43
A.2.1 Fonctionnelle de Hamilton pour les vibrations longitudinales de poutres droites minces . .	43
A.2.2 Autres formes de fonctions d'Euler . . . . .	44

# Introduction

Ce cours est fortement inspiré, dans son contenu et sa rédaction, de divers autres sources d'enseignement, particulièrement :

- Le cours de mécanique du DEA d'Acoustique Appliquée (Université du Maine, France) réalisé par Bernard CASTAGNÈDE.
- Le cours de vibrations de l'ENSIM (Université du Maine) de Jean-Claude PASCAL.
- Le cours de rayonnement acoustique des structures (GMC 721, Université de Sherbrooke, Qc, Canada) d'Alain BERRY.

Ces ouvrages, souvent écrits dans des contextes plus larges ou connexes au présent document, peuvent constituer une bonne source d'information complémentaire ou alternative.

Merci de me faire part des éventuelles erreurs ou incohérences que vous releverez au cours de ces quelques pages, ainsi que vos critiques et suggestions à :

luc.jaouen@univ-lemans.fr



# 1 Un Degré De Liberté

Ce chapitre présente rapidement les résultats importants pour le cas d'un système mécanique linéaire à 1 ddl avec amortissement. L'analogie avec un système électrique est évidente, la littérature sur le sujet n'en est que plus fournie.

## 1.1 Oscillations libres

Soit l'oscillateur harmonique amorti par effet visqueux (proportionnel à la vitesse) de la figure 1.1.

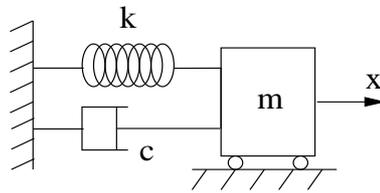


FIG. 1.1 – Représentation schématique d'un oscillateur amorti simple

L'équation de son mouvement est :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1.1)$$

En supposant une dépendance en temps de la forme  $e^{rt}$ , on peut écrire l'équation caractéristique associée à cette équation du mouvement :

$$mr^2 + cr + k = 0$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

En introduisant les termes :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{m} && \text{pulsation naturelle non amortie} \\ c_{cr}^2 - 4km = 0 &\implies c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0 && \text{amortissement critique} \\ \xi &= \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_0} && \text{facteur d'amortissement visqueux} \end{aligned}$$

on peut alors ré-écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\omega_0\xi\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire, homogène, à coefficients constants s'écrit (cf cours math.) :

$$x(t) = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t}$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires déterminées d'après les conditions initiales.

3 cas sont observés suivant le signe de  $\Delta = c^2 - 4km$  (cf figures 1.2, 1.3 et 1.4) :

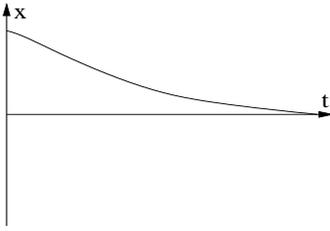


FIG. 1.2 – Sur amorti.

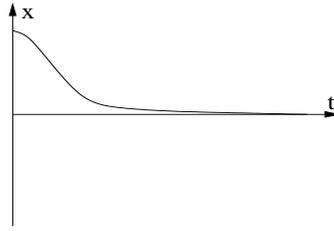


FIG. 1.3 – Critique

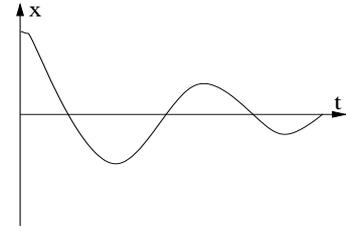


FIG. 1.4 – Sous amorti

- Si  $\Delta > 0$ ,  $\xi > 1$ ,  $r_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ , l'oscillateur est dit sur amorti.

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (1.2)$$

- Si  $\Delta = 0$ ,  $\xi = 1$ ,  $r_{1,2} = -\xi\omega_0 = -\omega_0$ , l'amortissement est critique. C'est ce qu'on recherche dans le cas d'une suspension automobile par exemple.

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\xi\omega_0 t} \quad (1.3)$$

- Si  $\Delta < 0$ ,  $0 < \xi < 1$ ,  $r_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ , l'oscillateur est dit sous amorti. C'est le cas de la plupart des oscillateurs mécaniques courants.

$$x(t) = \left[ C_1 \cos(\sqrt{1 - \xi^2}\omega_0 t) + C_2 \sin(\sqrt{1 - \xi^2}\omega_0 t) \right] e^{-\xi\omega_0 t} \quad (1.4)$$

$$\text{ou } x(t) = A \sin(\sqrt{1 - \xi^2}\omega_0 t - \phi) e^{-\xi\omega_0 t}$$

Ce dernier résultat est celui d'un régime pseudo-périodique dont on remarque que la *pseudo pulsation*  $\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$  diffère de la pulsation naturelle non amortie  $\omega_0$  par le terme  $\sqrt{1 - \xi^2}$  lui même fonction de l'amortissement  $\xi$ ;  $\omega_p \leq \omega_0$  (cf fig. 1.5).

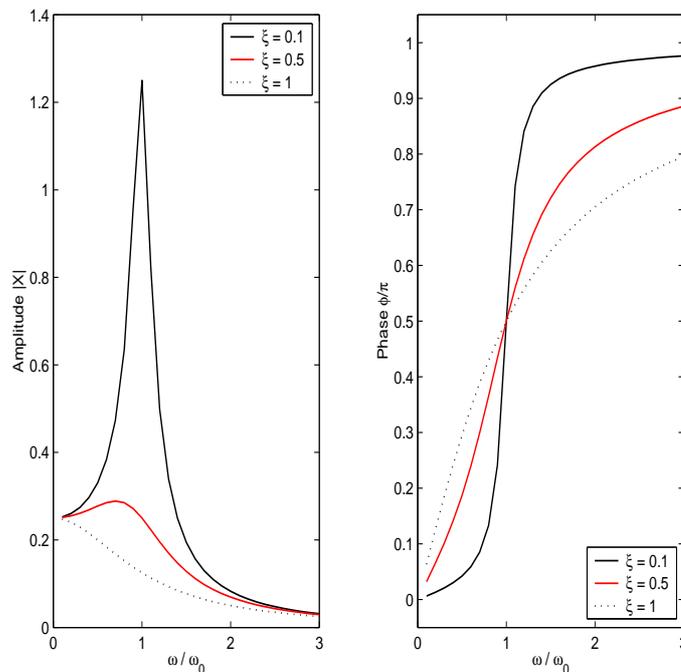


FIG. 1.5 – Influence de l'amortissement sur la position de la résonance d'une système à 1 ddl.  $m = 10$  kg,  $k = 4$  N.m<sup>-1</sup>.

## 1.2 Réponse à une excitation harmonique

L'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique amorti soumis à une force extérieure  $F(t)$  s'écrit :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1.5)$$

Le cas le plus simple est celui d'une force harmonique, ie  $F(t) = F \cos(\omega t + \theta)$ . La solution générale de l'équation du mouvement est alors une combinaison linéaire de la solution générale de l'équation sans second membre (régime des oscillations libres, cf §1.1), et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Comme précédemment, on peut ré-écrire 1.5 comme :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m}$$

et passer en notation complexe<sup>1</sup> :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta) \quad \text{soit en notation complexe} \quad \hat{F}(t) = \mathbf{F}e^{j\omega t}, F(t) = \text{Re}[\hat{F}(t)]$$

On considère une solution particulière sous la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta + \phi) \quad \text{soit en notation complexe} \quad \hat{x}(t) = \mathbf{X}e^{j\omega t}, x(t) = \text{Re}[\hat{x}(t)] \quad (1.6)$$

L'équation 1.5 s'écrit alors en notation complexe :

$$\left(-\omega^2 + j2\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2\right)\mathbf{X}e^{j\omega t} = \frac{\mathbf{F}}{m}e^{j\omega t} \quad (1.7)$$

A partir de cette dernière notation, l'amplitude complexe  $\mathbf{X}$  de la solution particulière s'obtient facilement :

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{F}/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega}$$

On peut exprimer le module et la phase du déplacement  $x(t)$  comme :

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}| &= \frac{|\mathbf{F}|/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}} = A \\ \phi &= \arctan \frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

On peut d'ores et déjà exprimer la *fonction de transfert*  $\mathbf{H}(\omega)$  qui sera étudiée plus en détail dans le chapitre d'analyse modale :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}} &= \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega)} \\ &= \frac{1}{(k - m\omega^2) + jc\omega} \end{aligned}$$

Cette fonction de transfert peut être représentée suivant son amplitude et sa phase ou suivant ses parties réelle et imaginaire (cf fig. 1.2).

## 1.3 Théorème de superposition

Si  $x_1(t)$  est solution de l'équation 1.5 et si  $x_2(t)$  l'est également, alors  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  est aussi solution de 1.5 :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t) \end{cases} \\ \implies m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad \text{avec} \quad F = F_1 + F_2$$

Le théorème de superposition tient au fait que l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique est linéaire. Dans le cas d'une équation différentielle non linéaire, il ne s'applique plus.

<sup>1</sup>Les grandeurs en gras représentent des grandeurs complexes

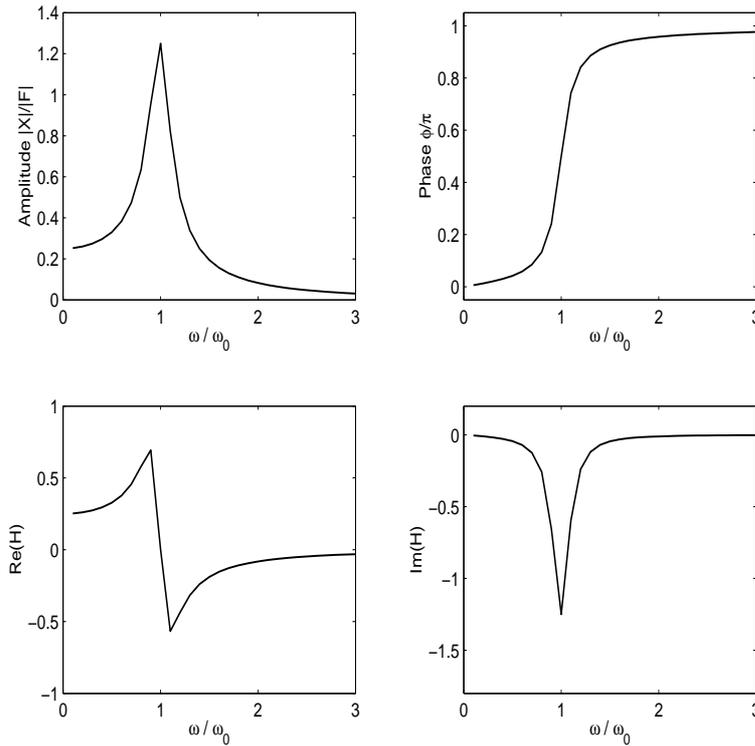


FIG. 1.6 – Représentations de la fonction de transfert  $\mathbf{H}$  pour  $m = 10$  kg,  $k = 4$  N.m $^{-1}$  et  $c = 4$  N.s.m $^{-1}$ .

## 1.4 Réponse à une excitation périodique quelconque

Lorsque la force extérieure est quelconque mais périodique, de période  $T$ , elle peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t) \quad \text{où} \quad \Omega = 2\pi/T$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos(n\Omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin(n\Omega t) dt \end{cases}$$

La solution à cette excitation est alors déterminée en faisant usage du théorème de superposition (cf §1.3) et les résultats à une excitation harmonique.

### Exemple

Calculer la réponse forcée de l'ocillateur harmonique, sans amortissement, à la fonction créneau.

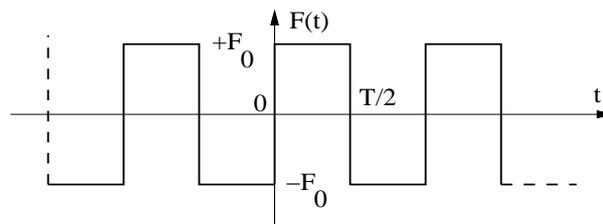


FIG. 1.7 – Fonction créneau

De l'observation de la fonction créneau, on déduit rapidement que  $\forall n$ ,  $a_n = 0$  (la fonction créneau est impaire alors que la fonction cosinus est paire).

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} F_0 \left[ \int_0^{T/2} \sin(n\Omega t) dt - \int_{-T/2}^0 \sin(n\Omega t) dt \right] \\
&= \frac{4F_0}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\Omega t) dt \\
&= \frac{4F_0}{n\Omega T} \left[ 1 - \cos\left(n\Omega \frac{T}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

seules les composantes impaires sont non nulles :

$$b_{2p+1} = \frac{4F_0}{(2p+1)\pi} \quad \text{soit} \quad F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\left[\frac{2\pi}{T}(2p+1)t\right]$$

La solution à l'ordre p vérifie donc l'équation :

$$m\ddot{x} + kx = \frac{4F_0}{\pi} \frac{1}{2p+1} \sin\left[\frac{2\pi}{T}(2p+1)t\right]$$

On considère une solution particulière, à l'ordre p, sous la forme :

$$\begin{aligned}
x_{2p+1}(t) &= X_{2p+1} \sin\left[\frac{2\pi}{T}(2p+1)t\right] \\
\Rightarrow X_{2p+1} &= \frac{4F_0}{\pi} \frac{1}{2p+1} \frac{1}{k - m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (2p+1)^2}
\end{aligned}$$

On écrit alors la solution générale en utilisant le théorème de superposition :

$$x(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{T}(2p+1)t\right]}{k - m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (2p+1)^2}$$

## 1.5 Réponse à une excitation quelconque

Avant de déterminer la réponse à une excitation quelconque, il faut déterminer la réponse à une impulsion :  $h(t)$ . L'excitation, infiniment brève communique au système une certaine quantité de mouvement initiale  $p_0$  sans que le système n'ait encore le temps de se déplacer. L'oscillateur continue sur un mouvement de vibrations libres.

En prenant le cas d'un oscillateur sous amorti (cf eq. 1.4), pour lequel :

$$x(t) = \left[ C_1 \cos\left(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t\right) \right] e^{-\xi \omega_0 t}$$

les conditions initiales précédentes se traduisent comme :

$$\begin{aligned}
x(t=0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0 \\
m\dot{x}(t=0) = p_0 &\Rightarrow C_2 = \frac{p_0}{m\omega_p}
\end{aligned}$$

La réponse impulsionnelle  $h(t)$  est donc  $(x(t) = h(t) \int_0^t p_0 \delta(t) dt)$  :

$$\begin{cases} h(t) = \frac{1}{m\omega_p} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_p t) & t \geq 0 \\ h(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{réponse causale}) \quad (1.8)$$

Nous pouvons maintenant déterminer la réponse  $q(t)$  à une excitation quelconque  $Q(t)$  causale ( $Q(t) = 0 < t = 0$ ). Cette solution s'écrit sous la forme d'un produit de convolution<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} q(t) &= h(t) * Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Q(t - \tau)d\tau \\ &= Q(t) * h(t) = \int_0^t h(t - \tau)Q(\tau)d\tau \end{aligned}$$

En reportant l'expression de  $h(t)$  (1.8), on aboutit à l'intégrale de DUHAMEL :

$$q(t) = \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{m\omega_p} \int_0^t e^{\xi\omega_0\tau} Q(\tau) \sin [\omega_p(t - \tau)] d\tau \quad (1.9)$$

Pour un système très faiblement amorti,  $\xi \simeq 0$  et  $\omega_p \simeq \omega_0$  :

$$q(t) \simeq \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t Q(\tau) \sin [\omega_0(t - \tau)] d\tau \quad (1.10)$$

### Exemple

Déterminons la réponse d'un oscillateur faiblement amorti à une fonction échelon<sup>3</sup> en  $t = \tau$  :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \tau \\ \text{constante} = F_0 & \text{pour } t \geq \tau \end{cases}$$

De 1.10, on en déduit que :

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_p} e^{-\xi\omega_0 t} \int_{\tau}^t e^{\xi\omega_0\tau} \sin [\omega_p(t - \tau)] d\tau$$

Après intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1-\xi^2}} \cos [\omega_0(t - \tau) - \phi] \quad \text{pour } t \geq \tau \\ \text{avec } \phi &= \arctan \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned}$$

En l'absence d'amortissement, le système oscille indéfiniment :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left( 1 - \cos [\omega_0(t - \tau)] \right)$$

Quand  $0 < \xi < 1$  et  $t \gg \tau$ , on tend vers la réponse stationnaire du système :

$$x(t) = \frac{F_0}{k}$$

**Nota Bene** : Il peut être plus simple d'utiliser des transformées de LAPLACE pour déterminer les équations de mouvements à diverses excitations, le calcul de la convolution s'avérant complexe (cf TD).

<sup>2</sup>Le produit de convolution est commutatif

<sup>3</sup>Aussi appelée fonction de Heaviside

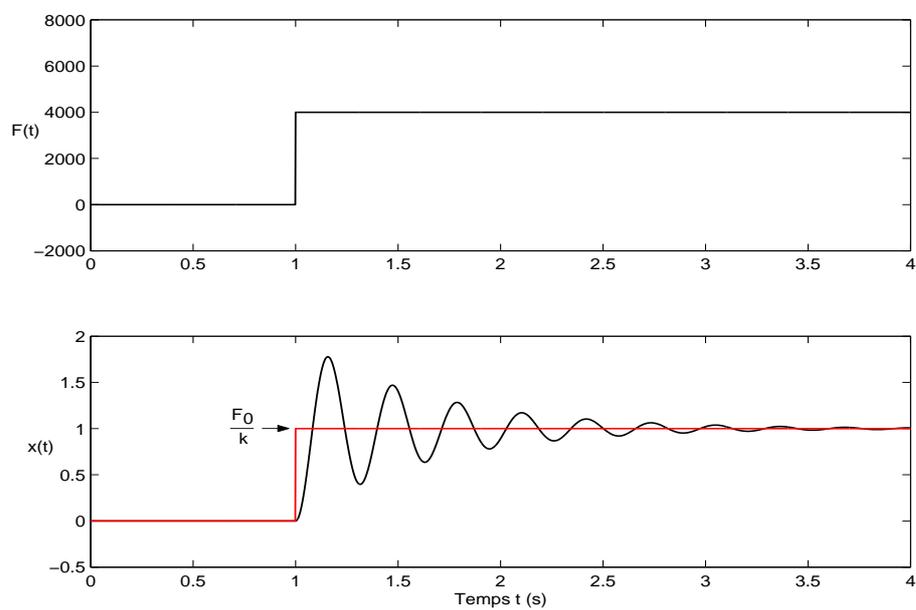


FIG. 1.8 – Solution de l'exemple pour le cas  $m = 10$  kg,  $k = 4000$  N.m<sup>-1</sup>,  $c = 32$  N.s.m<sup>-1</sup> ( $\xi = 0.08$ ),  $F_0 = 4\,000$  N,  $\tau = 1$  s



## 2 n degrés de liberté

Ce chapitre présente rapidement la méthode de résolution et les résultats importants pour des systèmes mécaniques à plusieurs degrés de liberté. Il est également une seconde introduction au chapitre d'analyse modale.

### 2.1 Méthode de la base modale

Une des méthodes élégantes de résolution d'un système à  $n$  degrés de liberté est la méthode de la base modale qui consiste à ramener le problème de  $n$  ddl couplés, à un ensemble de systèmes à 1 ddl découplés

- en normalisant l'équation du mouvement par rapport à la masse.
- en réalisant une transformation de coordonnées pour se placer dans la *base modale* où les équations du mouvement sont découplées.

Soit le système à  $n$  degrés de liberté écrit sous sa forme matricielle<sup>1</sup> :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0$$

dont on veut déterminer la réponse libre pour les conditions initiales :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(0) & \quad \text{vecteur des déplacements initiaux à } t = 0 \\ \dot{\mathbf{x}}(0) & \quad \text{vecteur des vitesses initiales à } t = 0\end{aligned}$$

■ La première étape consiste à normaliser la matrice masse<sup>2</sup>. En utilisant le changement de variable  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}$  et en multipliant le système d'équations du mouvement par  $\mathbf{M}^{-1/2}$  :

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}(t) = 0$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2} &= \mathbf{I} \quad \text{matrice unitaire/identité} \\ \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2} &= \tilde{\mathbf{K}}\end{aligned}$$

Finalement, le système peut s'écrire :

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = 0$$

Les conditions initiales se ré-écrivent :

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{x}(0) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{M}^{1/2}\dot{\mathbf{x}}(0)$$

■ La deuxième étape est le calcul des *valeurs et vecteurs propres*. En cherchant une solution de la forme  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{w}e^{j\omega t}$  soit  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}e^{j\omega t}$  le système devient :

$$(-\omega^2\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{v}e^{j\omega t} = 0$$

En posant  $\lambda = \omega^2$  et en dehors de la solution triviale ( $\mathbf{v} = 0$ ), on remarque qu'on se ramène à un problème typique de recherche de valeurs propres :

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

---

<sup>1</sup>Les grandeurs en gras représentent des tenseurs : d'ordre 1 pour les vecteurs, 2 pour les matrices

<sup>2</sup>qui, comme la matrice raideur, est carrée, de dimension  $n \times n$  et généralement symétrique. La matrice masse est de plus souvent diagonale ; c'est le cas de figure que nous supposons ici.

Les  $n$  valeurs propres sont obtenues en cherchant les solutions  $\lambda$  de l'équation caractéristique :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}) = 0$$

Les  $n$  vecteurs propres sont les solutions des  $n$  équations associées à chaque valeur propre  $\lambda_i$  :

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{v}_i = 0$$

Les vecteurs propres  $\mathbf{v}$  forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants (*ie* orthogonaux, c'est ce qui implique la *relation d'orthogonalité* entre les vecteurs propres). Ils ne sont pas, à priori, normés. On note  $\mathbf{u}_i$  le vecteur normé de  $\mathbf{v}_i$ . Les vecteurs  $\mathbf{u}$  sont donc orthonormaux et on peut définir une *matrice orthogonale*  $\mathbf{P}$  telle que :

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$$

D'après les propriétés des vecteurs  $\mathbf{u}$ , on montre que :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} = \text{diag}(\lambda) \quad \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}$$

■ La projection dans la base modale constitue la troisième étape :

On opère le dernier changement de variable suivant :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P} \mathbf{r}(t)$$

et on multiplie le système d'équations du mouvement par  $\mathbf{P}^T$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} \mathbf{r}(t) = 0$$

En tenant compte des propriétés énoncées plus haut et en considérant  $\lambda_i = \omega_i^2$ , cette transformation conduit à :

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2) \mathbf{r}(t) = 0$$

qui représente un système de  $n$  équations indépendantes (*ie* découplées) :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1(t) + \omega_1^2 r_1(t) &= 0 \\ \ddot{r}_2(t) + \omega_2^2 r_2(t) &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Les conditions initiales s'expriment dans la base modale comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) = \mathbf{P} \mathbf{r}(t) &\implies \mathbf{r}(t) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{q}(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{P}^T \mathbf{q}(0) &\quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{P}^T \dot{\mathbf{q}}(0) \end{aligned}$$

La solution pour  $r_i(t)$  est celle d'un système à un degré de liberté que l'on peut mettre sous la forme :

$$r_i(t) = \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{i0}^2 + \dot{r}_{i0}^2}}{\omega_i} \sin \left( \omega_i t + \arctan \frac{\omega_i r_{i0}}{\dot{r}_{i0}} \right)$$

en déterminant les constantes amplitude et phase à partir des conditions initiales.

■ La quatrième étape est la transformation inverse.

En utilisant les équations précédentes, il est possible de calculer le vecteur des déplacements  $\mathbf{x}$  à partir des solutions dans la base modale  $\mathbf{r}$  :

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{P} \mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{r}$$

La matrice  $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{P}$  est constituée de vecteurs colonnes notés  $\phi$  :

$$\mathbf{S} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$$

tels que  $\phi_i = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{u}_i$ .

$\phi_i$  est le vecteur de la *déformée modale* du mode  $i$ , *ie* le vecteur des déplacements unitaires  $(\phi_i)_j$  de chaque masse  $j$ .

Les déplacements peuvent s'écrire :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S} \mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) \phi_i$$

soit pour une masse  $j$  :

$$x_j = \sum_{i=1}^n r_i(t)(\phi_i)_j = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \theta_i)(\phi_i)_j$$

avec :

$$A_i = \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{i0}^2 + \dot{r}_{i0}^2}}{\omega_i} \quad \text{et} \quad \theta_i = \arctan \frac{\omega_i r_{i0}}{\dot{r}_{i0}}$$

Une présentation graphique peut-être faite de ce que l'on vient de voir. Si on imagine une cloche frappée par un marteau à l'instant  $t$ . A un instant  $t + \Delta t$ , le mouvement complexe de la cloche est un mouvement d'oscillations libres que l'on peut décomposer en formes modales indépendantes (et plus simples). La physique de ces formes modales nous permet de leur donner des équivalents mathématiques d'oscillateurs à 1 ddl :

Changement de base $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n r_i \phi_i$	
$n$ équations découplées $\mathbf{I}\ddot{\mathbf{r}} + \text{diag}(\omega_i^2)\mathbf{r} = 0$	

## 2.2 Systèmes avec amortissement visqueux

Les systèmes réels sont amortis mais on ne connaît pas bien, dans la plupart des cas, le modèle d'amortissement. Souvent, le modèle d'amortissement visqueux est utilisé pour des raisons de simplicité. La méthode consiste à considérer un *amortissement modal*  $\xi_i < 1$  inclus dans les équations découplées de la base modale :

$$\ddot{r}_i + 2\omega_i \xi_i \dot{r}_i + \omega_i^2 r_i = 0 \quad (2.1)$$

dont les solutions sont :

$$r_i(t) = A_i e^{-\xi_i \omega_i t} \sin(\omega_{pi} t + \theta_i) \quad \text{avec} \quad \omega_{pi} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

L'amortissement modal  $\xi_i$  devra être soit déterminé expérimentalement, soit identifié à partir de la matrice des coefficients d'amortissement  $\mathbf{C}$  qui entre dans le système d'équations du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0$$

En règle générale, il n'est pas possible de diagonaliser en même temps les 3 matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  par décomposition sur la base modale, des méthodes numériques sont alors utilisées. Cependant, il existe un cas permettant de découpler les  $n$  équations : si la matrice  $\mathbf{C}$  peut être approchée par une combinaison linéaire des matrices masse et raideur :

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ constants}$$

Cette forme d'amortissement est appelé amortissement visqueux *proportionnel*.

Le système d'équations du mouvement s'écrit alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + [\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}]\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0$$

en utilisant les mêmes changements de variables que dans le cas non amorti :  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{P}\mathbf{r}$  et en multipliant le système par, successivement,  $\mathbf{M}^{-1/2}$  et  $\mathbf{P}^T$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}}(t) + [\alpha \mathbf{I} + \beta \tilde{\mathbf{K}}]\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) &= 0 \\ \mathbf{I}\ddot{\mathbf{r}}(t) + [\alpha \mathbf{I} + \beta \text{diag}(\omega_i^2)]\dot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2)\mathbf{r}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation ne comporte que des matrices diagonales, donc correspond à  $n$  équations modales découplées :

$$\ddot{r}_i + [\alpha + \beta \omega_i^2]\dot{r}_i + \omega_i^2 r_i = 0$$

En rapprochant cette équation de celle utilisant l'amortissement modal  $\xi_i$  (2.1), on obtient l'équivalence  $2\xi_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2$  d'où :

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2}$$

## 2.3 Réponses forcées

Le système forcé se met sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$$

où  $\mathbf{F}(t)$  est le vecteur des forces appliquées à chaque masse :

$$\mathbf{F} = [F_1 \ F_2 \ \dots]^T$$

En suivant toujours la même démarche : on pose  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}$  et on multiplie le système par  $\mathbf{M}^{-1/2}$  :

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}(t)$$

avec  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1/2}$ , puis en posant  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}\mathbf{r}(t)$  et en multipliant par  $\mathbf{P}^T$  :

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(2\xi_i\omega_i)\dot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2)\mathbf{r}(t) = \mathbf{P}^T\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}(t)$$

où  $\xi_i$  est obtenu de la méthode d'amortissement proportionnel.

$\mathbf{f}(t) = \mathbf{P}^T\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}(t)$  est le vecteur des *forces modales* dont les éléments  $f_i(t)$  sont des combinaisons linéaires des forces  $F_i(t)$ . Finalement, l'équation modale découplée est de la forme :

$$\ddot{r}_i + 2\omega_i\xi_i\dot{r}_i + \omega_i^2r_i = f_i$$

dont la solution est celle du système à 1 ddl de déplacement  $r_i(t)$  :

$$\begin{aligned} r_i(t) &= A_i e^{-\xi_i\omega_i t} \sin(\omega_{pi}t + \theta_i) + f_i * h_i(t) \\ &= A_i e^{-\xi_i\omega_i t} \sin(\omega_{pi}t + \theta_i) + \frac{1}{\omega_{pi}} e^{-\xi_i\omega_i t} \int_0^t f_i(\tau) e^{-\xi_i\omega_i \tau} \sin[\omega_{pi}(t - \tau)] d\tau \end{aligned}$$

Les coefficients  $A_i$  et  $\theta_i$  de la solution générale sont déterminés en utilisant les conditions initiales. En régime *stationnaire* (harmonique permanent), la solution particulière pour  $F_i(t) = F_{i0} \cos(\omega t)$  est :

$$r_i(t) = \frac{f_{i0}}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_i\omega_i\omega)}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\xi_i\omega_i\omega}{\omega_i^2 - \omega^2}\right)$$

avec  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{P}^T\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}_0$ .

Le vecteur déplacement s'écrit comme précédemment :

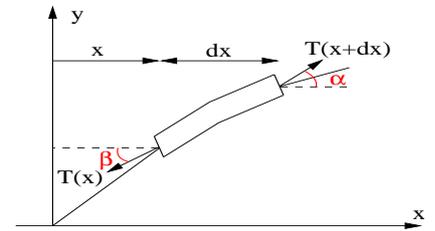
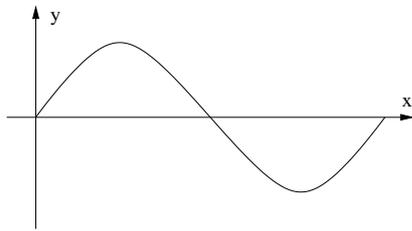
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t)\phi_i$$

### 3 Vibration transversale des cordes

L'étude des vibrations libres d'un corde constituera notre première approche au cas des milieux continus (1D). On s'intéresse ici au cas de la vibration transversale des cordes sans raideur (souples) mais possédant une élasticité finie (ce qui modélise plus une chaîne constituée de très petits maillons plutôt qu'une corde monofilament). De nombreuses hypothèses sont souvent émises sur le comportement du système afin de simplifier les calculs. Il n'est pas toujours évident de donner un sens physique à ces hypothèses.

Pour rappel, cette étude des milieux continus est réalisée sous l'hypothèse des petites déformations (petits angles).

La vibration des cordes, de façon beaucoup plus large fait l'objet du livre de C. VALETTE et C. CUESTA[1].



L'équation du mouvement de la corde peut-être obtenue simplement à partir de l'équation d'équilibre dynamique (RFD) ou d'une considération énergétique.

- A partir de la relation fondamentale de la dynamique (RFD) :

$$m\ddot{y} = \sum \mathbf{F}_{ext} \tag{3.1}$$

En notant  $\rho$  la masse linéique de la corde (de dimension  $[kg.m^{-1}]$ ) et  $T$  la tension de la corde, on écrit la projection suivant l'axe  $y$  de 3.1 comme :

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \sin \beta + T \sin \alpha \tag{3.2}$$

(En projetant la RFD sur l'axe  $x$  on montre facilement qu'on peut faire l'hypothèse que les tensions en  $x$  et  $x + dx$  sont équivalentes en module pour des petits angles  $\alpha$  et  $\beta$ ).

$$\text{or } \begin{cases} \sin \beta \simeq \tan \beta = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \\ \sin \alpha \simeq \tan \alpha = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} \end{cases}$$

de quoi l'on peut ré-écrire l'équation 3.2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T}{\rho} \frac{\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x}{dx} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

En introduisant la constante  $c = \sqrt{T/\rho}$ , de même dimension qu'une vitesse, on aboutit à :

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{3.4}$$

- A partir de l'équation de Lagrange :

En notant  $l$  la longueur de la corde au repos et  $l'$  sa longueur en vibration, on a :

$$\begin{aligned} l' &= \int_0^l ds \simeq \int_0^l \sqrt{1 + y_{,x}^2} dx \\ l' &\simeq \int_0^l \left( 1 + \frac{1}{2} y_{,x}^2 \right) dx = l + \frac{1}{2} \int_0^l y_{,x}^2 dx \\ \Delta l &= l' - l = \frac{1}{2} \int_0^l y_{,x}^2 dx \end{aligned}$$

Les expressions des énergies cinétique totale  $E_c$  et potentielle totale  $E_p$  du système sont respectivement :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{\rho}{2} \int_0^l y_{,t}^2 dx \\ E_p &= T \Delta l = \frac{T}{2} \int_0^l y_{,x}^2 dx \end{aligned}$$

L'équation d'Euler-Lagrange, qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

s'applique en tout point  $x$ , pour lequel on a alors :

$$\begin{aligned} E_c = \frac{\rho}{2} y_{,t}^2 \implies \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \frac{\rho}{2} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) &= \rho \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ E_p = \frac{T}{2} y_{,x}^2 \implies \frac{\partial E_p}{\partial x} &= 2 \frac{T}{2} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

On retrouve la même solution qu'en appliquant la RFD.

Dans le cas d'une corde infinie (de grande dimension par rapport aux autres dimensions du problème), la solution des équations (3.3) et (3.5) représente la propagation de deux ondes :

$$y(x, t) = \underbrace{g_1(x - ct)}_{\text{propagation vers les } x > 0} + \underbrace{g_2(x + ct)}_{\text{propagation vers les } x < 0}$$

Si de plus, on suppose une excitation harmonique, l'équation peut se mettre sous une forme semblable à celle de l'équation d'HELMHOLTZ :

$$\frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} + k^2 y(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

La solution à cette dernière équation est  $y(x) = Ae^{-jkx} + Be^{jkx}$  (la dépendance temporelle en  $e^{j\omega t}$  étant implicite).

Pour une corde de dimension finie, le déplacement  $y(x, t)$  dépendra des conditions de fixation aux extrémités (*ie* les conditions limites). La technique de séparation des variables est privilégiée pour obtenir les solutions du mouvement avec conditions limites particulières.

On suppose une solution s'écrivant sous la forme :

$$y(x, t) = X(x) \times T(t)$$

(où  $T$  est une fonction et ne doit pas être confondue avec l'amplitude de la force de tension)

En remplaçant dans l'équation du mouvement 3.3, on a :

$$c^2 \frac{d^2 X}{dx^2} T(t) = \frac{d^2 T}{dt^2} X(x)$$

soit :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \text{constante} = -k^2 \quad (3.6)$$

en effet, Les deux équations différentielles en  $X$  et  $T$  ayant des variables différentes indépendantes  $x$  et  $t$ , elles ne peuvent être égales qu'à une constante que l'on choisie de noter  $-k^2$  pour la simplification des calculs futurs.

L'équation 3.6 aboutit à la résolution de deux équations séparées :

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) & = 0 \\ \ddot{T}(t) + k^2 c^2 T(t) & = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} X(x) & = \alpha \sin(kx) + \beta \cos(kx) \\ T(t) & = \sigma \sin(\omega t) + \gamma \cos(\omega t) \quad \text{avec } \omega = kc \end{cases}$$

On a donc finalement, pour expression de la solution du mouvement des équations 3.3 ou 3.5 :

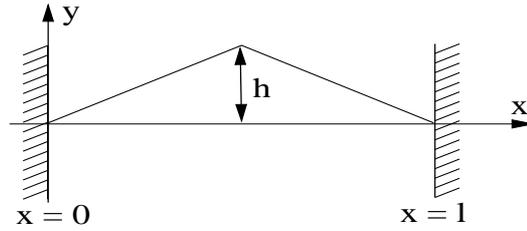
$$y(x, t) = \left[ \alpha \sin(kx) + \beta \cos(kx) \right] \left[ \sigma \sin(\omega t) + \gamma \cos(\omega t) \right] \quad \text{avec } \omega = kc$$

les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  seront déterminées des conditions aux limites,  $\sigma$  et  $\gamma$  des conditions initiales.

---

### Exercice

Calculer le champ de déplacement d'une corde pincée en son milieu.



Sitôt la corde lâchée, elle entre en vibrations libres. Ces vibrations sont déterminées des résultats précédents et des conditions initiales. Ces conditions initiales (au temps  $t = 0$ ) sont un déplacement imposé, sans vitesse de la corde et une vitesse initiale nulle :

$$y(x, 0) \begin{cases} 2h \frac{x}{l} & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 2h \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

et  $\dot{y}(x, 0) = 0$ .

En appliquant les conditions limites  $y(0, t) = y(l, t) = 0, \forall t$  (extrémités encastées), on obtient :

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \sin(kl) &= 0 \implies kl = n\pi, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Il existe donc une infinité de solutions telles que  $k = n\pi/l$ . Chaque solution correspond à un état privilégié de vibration de la corde appelé également *mode de vibration*. Mathématiquement, la réponse générale est une combinaison linéaire de tous ces modes :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right] \quad (3.7)$$

Il nous reste à calculer les termes  $A_n$  et  $B_n$ .

D'après les conditions initiales, la relation (3.7) qui impose pour la vitesse de la corde :

$$\dot{y}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left(\frac{n\pi c}{l}\right) \left[ -A_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right]$$

la condition  $\dot{y}(x, 0) = 0$  se ré-écrit :

$$\dot{y}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = 0$$

ce qui implique que  $B_n = 0 \forall n$ .

En multipliant la condition sur  $y(x, 0)$  par le terme  $\sin(n\pi x/l)$ , et en intégrant sur la longueur de la corde, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^l A_n \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= \int_0^{l/2} \frac{2hx}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \int_{l/2}^l 2h \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ \frac{A_n}{2} &= \frac{2h}{l} \left[ \int_0^{l/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \int_{l/2}^l (l-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right] \end{aligned}$$

Les deux intégrales s'intègrent par parties et s'expriment :

$$\begin{aligned} \int_0^{l/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= -\frac{l^2}{2n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{l^2}{n\pi}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ \int_{l/2}^l (l-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= \frac{l^2}{2n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{l^2}{n\pi}\right) \sin(n\pi) + \left(\frac{l^2}{n\pi}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{4h}{l^2} 2 \frac{l^2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\A_n &= (-1)^{(n-1)/2} \left(\frac{8h}{n^2\pi^2}\right) \quad \text{avec } n \text{ impair}\end{aligned}$$

et finalement :

$$y(x, t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \left(\frac{8h}{n^2\pi^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)$$

---

## Références

- [1] C. Valette et C. Cuesta, Mécanique de la corde vibrante, Hermes, 1993



# 4 Vibrations des poutres

Ce chapitre présente les vibrations longitudinales, de flexion et de torsion des poutres. Il décrit également de façon plus rigoureuse la mise en oeuvre de l'approche variationnelle pour le cas de matériaux continus (1D). Les termes qui ne sont pas définis ici sont présentés dans tout bon cours de Résistance Des Matériaux.

## 4.1 Définition d'une poutre

On nomme poutre un milieu continu ayant une dimension très grande par rapport aux deux autres.

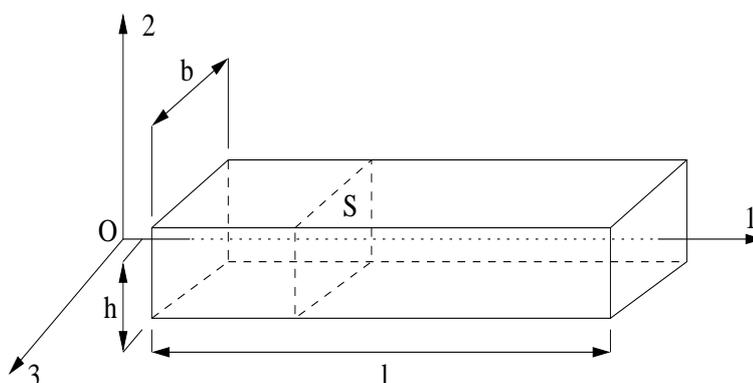


FIG. 4.1 – Représentation d'une poutre droite dans le repère  $(0, 1, 2, 3)$

On note  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées, dans le repère  $(0, 1, 2, 3)$ , d'un point  $M$  de la poutre dont on cherche à exprimer le champ de déplacement  $u_i(M, t)$  :

$$u_i(M, t) \begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}$$

La géométrie particulière qui a été définie va permettre de simplifier le champ de déplacement  $u_i(M, t)$  qui dépend par ailleurs du type de matériau, de l'excitation et des conditions limites. Ces simplifications ou hypothèses sur le champ de déplacement sont aussi appelées hypothèses de condensation. D'autres hypothèses simplificatrices apparaîtront plus tard. Liées au type d'excitation elles impliqueront des études séparées pour les vibrations longitudinales, de torsion ou de flexion des poutres.

Les hypothèses de condensation pour les poutres consistent à effectuer un développement en série de TAYLOR de  $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$  par rapport à  $x_2$  et  $x_3$  :

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3, t) = & u_i(x_1, 0, 0, t) + x_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1, 0, 0, t) + x_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, 0, 0, t) \\ & + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}(x_1, 0, 0, t) + \frac{x_3^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}(x_1, 0, 0, t) \\ & + x_2 x_3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, 0, 0, t) + \dots \end{aligned}$$

La théorie des poutres minces consiste à négliger les termes du 2<sup>ème</sup> ordre et d'ordres supérieurs dans ce développement :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_i(x_1, 0, 0, t) + x_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1, 0, 0, t) + x_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, 0, 0, t)$$

On notera par la suite :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_i^0(x_1, t) + x_2 u_i^2(x_1, t) + x_3 u_i^3(x_1, t)$$

soit :

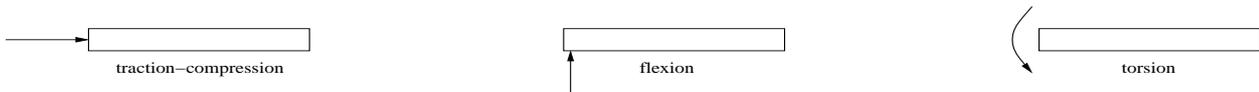
$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_1^0(x_1, t) + x_2 u_1^2(x_1, t) + x_3 u_1^3(x_1, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_2^0(x_1, t) + x_2 u_2^2(x_1, t) + x_3 u_2^3(x_1, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_3^0(x_1, t) + \underbrace{x_2 u_3^2(x_1, t) + x_3 u_3^3(x_1, t)}_{\text{rotations}} \end{cases} \quad (4.1)$$

Physiquement, le déplacement dans chaque direction 1, 2 ou 3 se compose d'un mouvement d'ensemble ( $u_i^0$ ) et de deux rotations ( $x_2 u_i^2 + x_3 u_i^3$ )



La théorie des poutres minces suppose que les sections droites restent planes après la déformation : c'est l'hypothèse de BERNOLLI. L'ensemble du champ de déplacement est connu si les déplacements et les rotations sont connus le long d'un axe moyen de la poutre : cet axe est appelé *axe neutre*, ou *fibre neutre*. L'hypothèse de condensation, pour une poutre mince consiste à réduire le milieu tridimensionnel en un milieu unidimensionnel équivalent. Les inconnues du problème après condensation sont les neuf fonctions  $u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_1^2, u_2^2, u_3^2, u_1^3, u_2^3, u_3^3$ . Ces neuf fonctions ne dépendent que d'une seule variable d'espace  $x_1$  et du temps  $t$ .

A ce stade, pour résoudre un problème de vibrations de poutre mince, on peut utiliser le champ de déplacement donné par l'expression 4.1, l'injecter dans la fonctionnelle de HAMILTON et trouver l'extrémum de cette fonctionnelle par rapport aux 9 fonctions inconnues. Une telle démarche est encore compliquée, on préfère réduire encore le nombre de fonctions inconnues pour décrire le déplacement. Ces simplifications supplémentaires sont possibles si l'on étudie séparément les vibrations longitudinales (en traction-compression) des vibrations de flexion ou de torsion.



## 4.2 Vibrations longitudinales

### 4.2.1 Champ de déplacement

Pour les vibrations longitudinales, on suppose que les déplacements se font de façon privilégiée le long de l'axe neutre de la poutre, ce qui correspond à une excitation dans l'axe de la poutre. On peut alors simplifier le champ de déplacement général 4.1 en imposant :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_1^0(x_1, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq 0 \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

La seule fonction inconnue  $u_1^0(x_1, t)$  correspond au déplacement d'ensemble dans la direction 1 de chaque section droite.

**Nota Bene** : on a, ici, négligé l'effet de POISSON (contraction de la section droite) consécutif à la déformation axiale. L'effet de Poisson correspond aux termes  $x_2 u_2^2(x_1, t)$  et  $x_3 u_3^2(x_1, t)$  de 4.1. Il faut garder en tête qu'il s'agit d'une hypothèse de simplification du problème par rapport à la théorie des milieux continus 3D dont il faudra vérifier le bien fondé par rapport aux observations expérimentales.

## 4.2.2 Fonctionnelle de Hamilton

Les hypothèses cinématiques (champ de déplacement) étant définies pour la géométrie et le type d'excitation étudiés, l'approche variationnelle comprend systématiquement les points suivants :

1. Calculs des déformations
2. Construction de la fonctionnelle de Hamilton
3. Extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton

### 4.2.2.1 Calculs des déformations

Par définition :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) + u_{j,i}(x_1, x_2, x_3, t) \right]$$

Ce qui donne pour le cas présent (cf 4.2)

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(x_1, t) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(x_1, t) \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

### 4.2.2.2 Construction de la fonctionnelle de Hamilton

Pour un matériau isotropique sous "état de contrainte unidimensionnelle", le tenseur d'élasticité est :

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} E & \nu E & \nu E & & & \\ \nu E & E & \nu E & & & \\ \nu E & \nu E & E & & & \\ & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & & \\ & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & \\ & & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Pour rappel, l'expression de la fonctionnelle de Hamilton est :

$$H(u_i) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt \quad (4.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} T &= \int_v \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dv \\ V &= \int_v \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dv \\ W &= \int_v f_i u_i dv \end{aligned}$$

Compte tenu de 4.2, 4.3 et 4.4 on obtient :

$$\begin{aligned} T &= \int_0^l \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial t} \right)^2 dx_1 \\ V &= \int_0^l \frac{1}{2} E S \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 \\ W &= \int_0^l f_1 S u_1^0 dx_1 \end{aligned}$$

$l$  : longueur de la poutre.  
avec  $S$  : surface de la section de la poutre.  
 $f_1$  : force axiale à l'abscisse  $x_1$ , par unité de longueur.

En résumé, la fonctionnelle de Hamilton pour les vibrations longitudinales de poutres droites minces est :

$$H(u_1^0) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} ES \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right)^2 + f_1 S u_1^0 \right] dx_1 dt \quad (4.6)$$

La fonctionnelle de Hamilton ne dépend que d'une seule fonction  $u_1^0$ . L'étape suivante consiste à chercher l'extrémum de  $H$  par rapport à cette fonction. Cet extrémum est le déplacement qui vérifie les équations de vibrations longitudinales de la poutre.

L'approche variationnelle de Hamilton ne nécessite pas le calcul explicite des contraintes dans la poutre. Dans l'approche cinématique, le calcul des contraintes peut poser problème. Intéressons nous par exemple à la contrainte  $\sigma_{22}$  :

On a :  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$  ie :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \nu E & \nu E & & & \\ \nu E & E & \nu E & & & 0 \\ \nu E & \nu E & E & & & \\ & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & & \\ & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & \\ 0 & & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Comme seul  $\varepsilon_{11}$  est non nul, on obtient  $\sigma_{22} = \nu E \varepsilon_{11}$ . La contrainte  $\sigma_{22}$  calculée à partir du champ de déplacement 4.2 est donc non nulle. En particulier,  $\sigma_{22}$  est non nulle sur la surface de la poutre, ce qui est incompatible avec la physique du problème. On doit donc être prudent et retenir que la formulation variationnelle de Hamilton peut mener à des résultats faux pour les contraintes dans le système. Pour remédier à ces incompatibilités sur les contraintes, on introduit parfois des modifications artificielles de la loi de comportement (donnée par le tenseur élastique  $C_{ijkl}$ ). On peut également utiliser d'autres formulations variationnelles comme celle de REISSNER.

#### 4.2.2.3 Extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton

On utilise, ici, directement les résultats liés aux équations d'Euler (présenté à l'annexe A.2) pour la fonctionnelle 4.6. Dans le cas de vibrations longitudinales des poutres, on a :

$$\alpha = \frac{1}{2} \rho S (u_{1,t}^0)^2 - \frac{1}{2} ES (u_{1,x_1}^0)^2 + f_1 S u_1^0$$

L'équation du mouvement et les conditions aux limites générales sont (cf eq. A.6 et A.7) :

$$\begin{aligned} \text{Equa. mvt : } & \frac{\partial \alpha}{\partial u_1^0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,t}^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0} \right) = 0 \\ \text{C. L. : } & \begin{cases} u_1^0(0, t) = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0}(0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1^0(l, t) = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0}(l, t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En exprimant les fonctions de  $\alpha$  :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u_1^0} = f_1 S \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,t}^0} = \rho S u_{1,t}^0 \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0} = -ES u_{1,x_1}^0$$

l'équation du mouvement devient :

$$\rho S \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( ES \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right) = f_1 S \quad \forall x_1 \in ]0, l[ \quad \forall t \quad (4.7)$$

soit si  $E$  et  $S$  sont indépendants de la variable  $x_1$  :

$$\rho S \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} = f_1 S \quad \forall x_1 \in ]0, l[ \quad \forall t \quad (4.8)$$

Les conditions limites, s'expriment quant à elles, comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^0(0, t) = 0 \\ \text{ou} \\ ES \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1^0(l, t) = 0 \\ \text{ou} \\ ES \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(l, t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Les relations 4.9 signifient que le problème, tel qu'il est modélisé (en 1D), n'a de solutions que si certaines conditions aux extrémités sont satisfaites. Les deux premières conditions signifient physiquement que les extrémités sont encastées (déplacement longitudinal imposé nul). Les deux dernières conditions représentent des extrémités libres : l'effet normal à une extrémité est imposé à zéro ( $ES \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} = S\sigma_{11} = 0$ ).

**Nota Bene** : La célérité des ondes de compression dans la poutre est d'après 4.8 :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

elle ne dépend pas des dimensions de la section de poutre.

## 4.3 Vibrations de flexion

### 4.3.1 Champ de déplacement

Pour l'étude du rayonnement acoustique de structures vibrantes, les vibrations de flexion sont généralement les plus importantes, ce sont elles qui, dans la plupart des cas, "font du bruit" (les vibrations longitudinales peuvent également produire un rayonnement acoustique par le biais de l'effet de Poisson - il faut alors le prendre en compte dans la modélisation).

En repartant de l'expression générale du champ de déplacement linéaire (sans les termes d'ordre strictement supérieurs à 1), 4.1, on émet de nouvelles hypothèses en considérant l'excitation. L'excitation est maintenant une force agissant dans le plan (1,2) qui va induire un déplacement privilégié suivant l'axe 2. Le champ de déplacement pour la flexion des poutres est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq x_2 u_1^2(x_1, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_2^0(x_1, t) \equiv w(x_1, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq 0 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

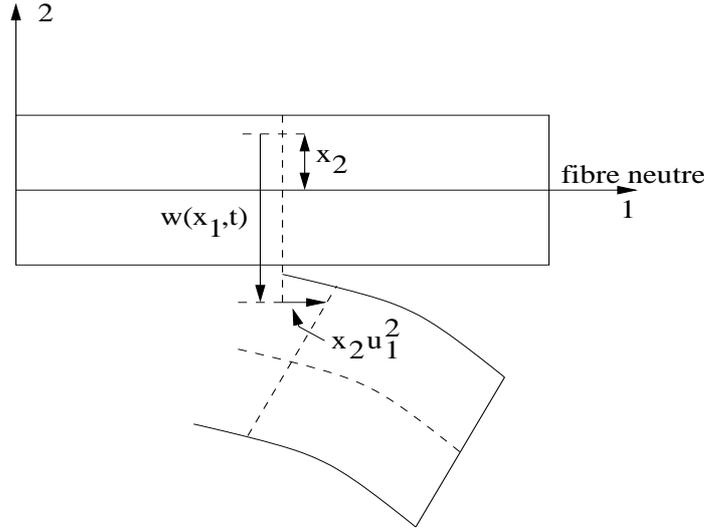
Ce champ de déplacement (4.10) correspond aux hypothèses de TIMOSHENKO. Deux fonctions cinématiques sont inconnues : la *flèche*  $w$  et la rotation des sections droites  $u_1^2$ . Plus simplement, la description de BERNOULLI fait l'hypothèse supplémentaire que les sections droites restent perpendiculaires à l'axe neutre après la déformation, ce qui impose :

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, t) = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, t)$$

Les hypothèses de Bernoulli conduisent au champ de déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq -x_2 \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq w(x_1, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

L'hypothèse de Bernoulli (dont le champ de déplacement ne possède plus qu'une fonction inconnue :  $w$ ) revient à négliger le cisaillement transversal  $\varepsilon_{12}$  des sections droites. Cette hypothèse est légitime pour un matériau homogène et pour les premiers modes de vibration.



### 4.3.2 Fonctionnelle de Hamilton

#### 4.3.2.1 Calculs des déformations

A partir du champ de déplacement 4.11 et de la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) + u_{j,i}(x_1, x_2, x_3, t) \right]$$

on calcule le champ de déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1, t) \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{cases}$$

#### 4.3.2.2 Construction de la fonctionnelle de Hamilton

$$H(u_i) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt$$

avec :

$$\begin{aligned} T &= \int_v \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dv \\ V &= \int_v \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dv \\ W &= \int_v f_i u_i dv \end{aligned}$$

Dans le cas de la flexion, ces expressions deviennent :

$$\begin{aligned} T &= \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{2} \rho \left[ x_2^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho I_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

où

$$I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} x_2^2 dx_2 dx_3 \quad (4.13)$$

$I_3$  est le moment quadratique de section de la poutre par rapport à l'axe 3. Le premier terme de 4.12 représente donc l'énergie cinétique due à la rotation des sections droites par rapport à l'axe neutre. Le deuxième terme représente, quant à lui, l'énergie cinétique due au déplacement transversal des sections.

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2(x_1, t) dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{2} E \left[ x_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1, t) \right]^2 dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^l \frac{1}{2} E I_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 \\
W &= \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left( f_2 w + m_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^l \left( F_2 w + M_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) dx_1
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
m_3 &= -f_1 x_2 \\
f_1, f_2 &: \text{forces par unité de volume} \\
M_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} -f_1 x_2 dx_3 dx_2 \quad \text{moment par unité de longueur} \\
F_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} f_2 dx_3 dx_2 \quad \text{force par unité de longueur}
\end{aligned}$$

$F_2$  et la résultante de la force suivant l'axe 2, sur la section droite.  $M_3$  est le moment résultant sur la section droite par rapport à l'axe 3.

En résumé, la fonctionnelle de Hamilton pour la flexion de poutres droites minces (hypothèses de Bernoulli) est :

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho I_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E I_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + F_2 w + M_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] dx_1 dt$$

On fait généralement une hypothèse supplémentaire, pour les poutres minces, qui consiste à négliger l'énergie cinétique due à la rotation des sections droites devant l'énergie cinétique due au mouvement de déplacement transversal : le terme d'inertie  $I_3$  est en effet proportionnel à  $h^3$ , alors que la surface  $S$  est proportionnelle à  $h$ . Cette hypothèse est surtout valable pour les premiers modes de flexion. On peut donc retenir :

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E I_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + F_2 w + M_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] dx_1 dt$$

#### 4.3.2.3 Extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton

Pour cette étape du calcul, on peut se reporter aux résultats de l'annexe A.2 en remarquant que la fonctionnelle est de la forme :

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \alpha(w, w_t, w_x, w_{xt}, w_{xx}, w_{tt}) dx dt$$

les termes  $w_{xt}$  et  $w_{tt}$  n'apparaissant pas dans l'expression simplifiée de la fonctionnelle. Les équations du mouvement et les conditions aux limites fournies par les équations d'Euler dans le cas présent s'écrivent :

$$\text{Equa. mvt : } \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial w_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial w_x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial w_{xx}} \right) = 0$$

Conditions aux limites pour  $x = 0$  et  $x = l$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial w_{xx}} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} w_x = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial w_{xx}} = 0 \end{array} \right.$$

Ce qui nous donne :

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = F_2 - \frac{\partial M_3}{\partial x_1} \quad (4.14)$$

et les conditions limites pour  $x_1 = 0$  et  $x_1 = l$  :

$$\begin{cases} w = 0 \\ \text{ou} \\ M_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w, x_1 = 0 \\ \text{ou} \\ EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Comme dans le cas des vibrations longitudinales, les conditions aux limites signifient que le problème posé n'a de solutions analytiques qu'à certaines conditions. Nous pouvons interpréter physiquement ces conditions comme :

- $w = 0$  et  $\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$  : condition d'*encastrement*.
- $w = 0$  et  $EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$  : condition d'*appui simple*.  
En effet,  $EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = M_3$  est moment de flexion de la section.

- $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = 0$  et  $EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$  : extrémité *libre*.  
En effet,  $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = F_2$  représente l'effort tranchant appliqué à la section.

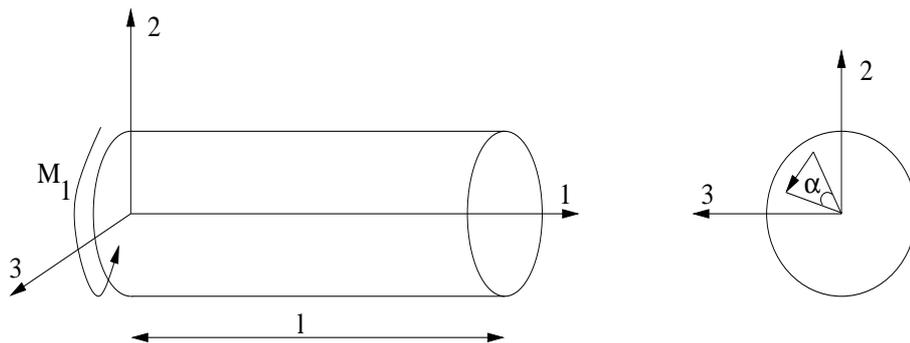
- $M_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = 0$  et  $\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$  : extrémité *guidée*.  
Cette condition n'a pas vraiment de réalité physique.

Les conditions  $w = 0$  et  $\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$  sont des conditions aux limites cinématiques (en déplacement).

Les conditions  $EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = 0$  sont des conditions aux limites dynamiques (en contraintes).

## 4.4 Vibrations de torsion

### 4.4.1 Champ de déplacement



On traite ici la torsion dans le cas simple d'une section droite circulaire. On suppose que l'excitation est un moment autour de l'axe 1 qui est aussi l'axe neutre de la poutre. Le déplacement dominant dans la torsion est la rotation des sections droites. Si  $\alpha(x_1, t)$  est le déplacement angulaire de la section droite d'abscisse  $x_1$ , on utilise le champ de déplacement simplifié (hypothèse de  $S^t$  VENANT) suivant :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq 0 \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq -x_3 \alpha(x_1, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq x_2 \alpha(x_1, t) \end{cases} \quad (4.16)$$

La seule fonction cinématique inconnue est l'angle  $\alpha(x_1, t)$ .

## 4.4.2 Fonctionnelle de Hamilton

### 4.4.2.1 Calculs des déformations

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} = -\frac{1}{2}x_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \end{cases}$$

### 4.4.2.2 Construction de la fonctionnelle de Hamilton

$$H(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho I_1 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} G I_1 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 + M_1 \alpha \right] dx_1 dt$$

où

$$I_1 = \int_S (x_2^2 + x_3^2) dx_2 dx_3$$

désigne le moment quadratique de la section circulaire par rapport à l'axe 1

### 4.4.2.3 Extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton

La fonctionnelle de Hamilton pour les vibrations de torsion a la même forme générale que la fonctionnelle de Hamilton pour les vibrations longitudinales. L'équation du mouvement et les conditions limites doivent donc avoir les mêmes formes dans les deux cas.

Equation du mouvement :

$$\rho I_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( G I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right) = M_1 \quad \forall x_1 \in ]0, l[ \quad \forall t \quad (4.17)$$

où  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  est le module de cisaillement du matériau.

Conditions limites en  $x_1 = 0$  et  $x_1 = l$  :

$$\begin{cases} \alpha(0, t) = 0 \\ \text{ou} \\ G I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha(l, t) = 0 \\ \text{ou} \\ G I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(l, t) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

La condition  $\alpha = 0$  est une condition d'encastrement, la condition  $G I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = 0$  (*moment de torsion nul*) est une condition d'extrémité libre.

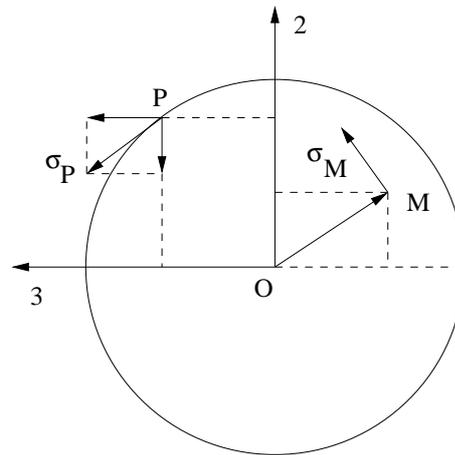
**Nota Bene** : Si on s'intéresse à la contrainte sur la surface de la poutre, on a :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \nu E & \nu E & & & \\ \nu E & E & \nu E & & & \\ \nu E & \nu E & E & & & \\ & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & & \\ & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & \\ & & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -x_3 \alpha_{,x_1} \\ -x_2 \alpha_{,x_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma_{21} = G x_3 \alpha_{,x_1} \quad \sigma_{31} = G x_2 \alpha_{,x_1}$$

On constate facilement qu'en tout point M de la section droite, la contrainte résultante est perpendiculaire au rayon OM (et proportionnelle à la distance OM). En particulier, pour un point P à la surface libre de la poutre, la contrainte est purement tangentielle. La contrainte normale est nulle à la surface du corps, ce qui est compatible avec la physique du problème. Or, pour une section droite circulaire, le champ de déplacement viole la condition de contrainte normale nulle à la surface du matériau. Pour les situations où la section droite n'est pas



circulaire ou annulaire, il faut utiliser un champ de déplacement différent pour la torsion ; le problème devient alors beaucoup plus compliqué, faisant apparaître un terme de déplacement longitudinal  $u_1$  qui représente le *gauchissement* de la section droite (ex : gomme à effacer).

---

## Bibliographie

- M. Géradin, D. Rixen, Théorie des vibrations, Masson, 1996
- D.J. Inman, Engineering vibration, Prentice-Hall, 1996
- S.S. Rao, Mechanical vibration, Addison-Wesley, 1995

# 5 Vibrations des plaques

Ce chapitre présente essentiellement les vibrations de flexion des plaques. Il fait appel à des notions introduites dans le chapitre concernant les vibrations de poutres.

## 5.1 Définition d'une plaque

On nomme plaque un milieu continu ayant une dimension très petite par rapport aux deux autres.

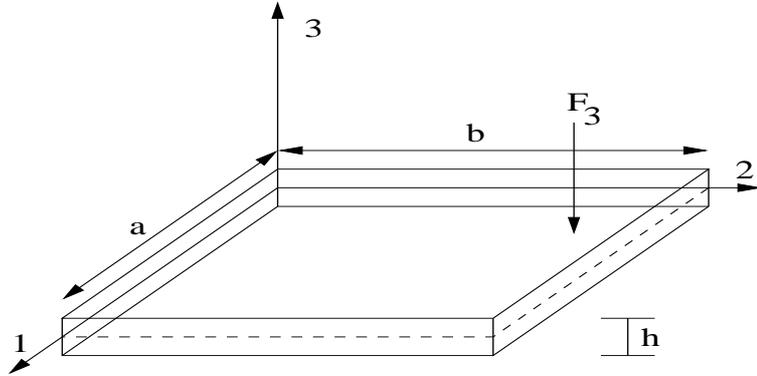


FIG. 5.1 – Représentation d'une plaque dans le repère  $(0, 1, 2, 3)$

On suppose que le plan neutre de la plaque est contenu dans le plan  $(1, 2)$ .

On note  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées, dans le repère  $(0, 1, 2, 3)$ , d'un point  $M$  de la plaque dont on cherche à exprimer le champ de déplacement  $u_i(M, t)$ .

$$u_i(M, t) \begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}$$

Tout comme dans le cas de la poutre, nous allons être amené à faire des hypothèses de condensation, liées uniquement à la géométrie plane considérée pour simplifier le champ de déplacement et les calculs.

## 5.2 Hypothèses de condensation

Les hypothèses de condensation pour les plaques consistent à effectuer un développement en série de Taylor de  $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$  par rapport à  $x_3$  (qui varie, ici, de  $-h/2$  à  $+h/2$ ) :

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3, t) &= u_i(x_1, x_2, 0, t) + x_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0, t) + \frac{x_3^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, 0, t) \\ &+ \dots + \frac{x_3^n}{n!} \frac{\partial^n u_i}{\partial x_3^n}(x_1, x_2, 0, t) + \dots \end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_i(x_1, x_2, 0, t) + x_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0, t)$$

que l'on notera :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_i^0(x_1, x_2, t) + x_3 u_i^3(x_1, x_2, t)$$

Les hypothèses de condensation des plaques minces sont donc :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_1^0(x_1, x_2, t) + x_3 u_1^3(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_2^0(x_1, x_2, t) + x_3 u_2^3(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_3^0(x_1, x_2, t) + x_3 u_3^3(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

Les déplacements dans le plan de plaque  $u_1$  et  $u_2$  sont la superposition de déplacements d'ensemble de la section droite ( $u_1^0$  et  $u_2^0$ ) et de rotations de la section droite par rapport à la fibre neutre ( $x_3 u_1^3$  et  $x_3 u_2^3$ ).



Dans la théorie des plaques minces, les sections droites restent donc droites après déformation.

Pour le déplacement transverse  $u_3$ , on néglige ses variations dans l'épaisseur de la plaque : Le déplacement transverse est donc constant pour chaque section droite :

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = u_3^0(x_1, x_2, t)$$

d'où :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_1^0(x_1, x_2, t) + x_3 u_1^3(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_2^0(x_1, x_2, t) + x_3 u_2^3(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_3^0(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

### 5.3 Vibrations longitudinales des plaques minces

Si l'excitation est dans le plan de la plaque, les mouvements privilégiés ont également lieu dans le plan de la plaque ( $u_1, u_2$ ). On définit ainsi le champ de déplacement correspondant aux hypothèses de *mouvement de membrane* de la plaque :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_1^0(x_1, x_2, t) + x_3 u_1^3(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_2^0(x_1, x_2, t) + x_3 u_2^3(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq 0 \end{cases}$$

Ce mouvement, peu rencontré ou exploité, seul, ne sera pas étudié d'avantage.

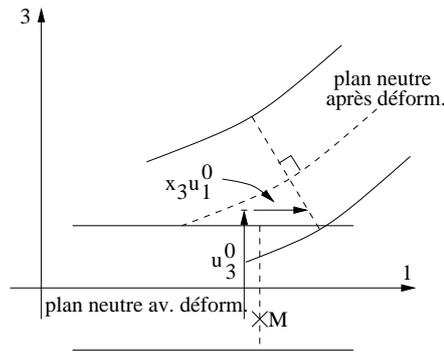
### 5.4 Vibrations de flexion des plaques minces

#### 5.4.1 Champ de déplacement

Si l'excitation est normale au plan de la plaque (*cf* fig. 5.1), le mouvement privilégié est la flexion (transverse au plan de la plaque). Le champ de déplacement est alors :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq x_3 u_1^3(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq x_3 u_2^3(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_3^0(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

La flexion, dans le cas général, est définie par 3 fonctions indépendantes :  $u_3^0, u_1^3$  et  $u_2^3$  des variables  $x_1, x_2$  et du temps  $t$ . On peut, comme dans le cas des poutres droites minces, introduire des simplifications supplémentaires en imposant d'autres hypothèses sur les fonctions  $u_1^3$  et  $u_2^3$ . Ce sont les hypothèses de LOVE-KIRCHHOFF. Ces hypothèses indiquent que les sections droites déformées doivent rester normales au plan neutre de la plaque.



Ceci impose :

$$\begin{cases} u_1^3(x_1, x_2, t) = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1}(x_1, x_2, t) \\ u_2^3(x_1, x_2, t) = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_2}(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

Le champ de déplacement des plaques minces sous les hypothèses de Love-Kirchhoff s'écrit donc :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \simeq -x_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1}(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \simeq -x_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2}(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \simeq u_3^0(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (5.2)$$

Cette flexion pure n'est alors décrite que par une fonction inconnue :  $u_3^0(x_1, x_2, t)$ .

**Nota Bene** : D'après l'équation 5.2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,3}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2}(u_{3,2} + u_{2,3}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Les hypothèses de Love-Kirchhoff reviennent à négliger le cisaillement transversal dans la plaque. Comme par ailleurs  $\varepsilon_{33} = (\partial u_3^0)/(\partial x_3) = 0$ , seules les composantes  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{21}$  du tenseur des déformations sont non nulles. Les hypothèses de Love-Kirchhoff sont donc celles d'un état de *déformation plane* dans le matériau.

## 5.4.2 Fonctionnelle de Hamilton

### 5.4.2.1 Calculs des déformations

A partir de l'équation 5.2, on détermine les déformations de la plaque :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \\ \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -x_3 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0 \end{cases}$$

### 5.4.2.2 Construction de la fonctionnelle de Hamilton

On reprend la forme générale de la fonctionnelle :

$$H(u_3^0) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt$$

L'énergie cinétique du système s'exprime ici comme :

$$\begin{aligned} T &= \int_v \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dv \\ &= \int_s \left\{ \frac{1}{2} \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \frac{h^3}{12} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

expression dans laquelle le déplacement transverse  $u_3^0$  est remplacé par la notation  $w$ , souvent utilisé pour désigner la *flèche* du déplacement.

Pour rappel l'énergie potentielle s'écrit :

$$V = \int_v \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dv$$

Si l'on adopte une loi de comportement de type matériau isotrope sous "état de contraintes planes", le tenseur des coefficients élastiques s'écrit :

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \nu \frac{E}{1-\nu^2} & \nu \frac{E}{1-\nu^2} & & & \\ \nu \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & \nu \frac{E}{1-\nu^2} & & & \\ \nu \frac{E}{1-\nu^2} & \nu \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & & & \\ & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & & \\ & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & \\ & & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

En tenant compte du fait que  $\varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_{32}$ ,  $\varepsilon_{33} = 0$ , et en tenant compte des propriétés de symétrie de  $\varepsilon_{ij}$  et  $C_{ijkl}$ , on a :

$$\begin{aligned} V &= \int_v \left( \frac{1}{2} C_{1111} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} C_{2222} \varepsilon_{22}^2 + 2 \frac{1}{2} C_{2121} \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{11} C_{1122} \varepsilon_{22} \right) \\ &= \int_s \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

La somme  $W$  des travaux des forces extérieures s'écrit quant à elle comme :

$$W = \int_s F_3 w dx_1 dx_2$$

où  $F_3$  est la force transverse appliquée par unité de surface sur la plaque (on suppose ici l'absence de moment de flexion appliqué).

En résumé, la fonctionnelle de Hamilton pour la flexion des plaques minces, s'écrit sous les hypothèses de Love-Kirchhoff :

$$\begin{aligned} H(w) &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \frac{h^3}{12} \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} \right)^2 \right]}_{\text{termes d'inertie rotationnelle}} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \\ &\quad \left. + F_3 w \right\} dx_1 dx_2 dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

On fera par la suite une hypothèse supplémentaire pour les plaques minces qui consiste à négliger l'inertie rotationnelle dans l'énergie cinétique. Cette hypothèse est valide pour les premiers modes de flexion.

### 5.4.2.3 Extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton

L'extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton peut, une fois de plus, se faire à partir du calcul de la dérivée au sens de Gateau (c'est un bon exercice) ou en utilisant les résultats d'Euler (§A.2) en remarquant que la fonctionnelle 5.4 est de la forme générale :

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_s \alpha(w, w_{,x_1}, w_{,x_2}, w_{,t}, w_{,x_1x_1}, w_{,x_2x_2}, w_{,x_1x_2}, w_{,x_1t}, w_{,x_2t}, w_{,tt}) dx_1 dx_2 dt$$

Les termes  $w_{,x_1}$ ,  $w_{,x_2}$  et  $w_{,tt}$  n'apparaissent pas dans la fonctionnelle 5.4; ni les termes  $w_{,x_1t}$  et  $w_{,x_2t}$  si l'inertie rotationnelle est négligée dans l'expression de l'énergie cinétique totale. L'équation du mouvement et les conditions limites données par les équations d'Euler sont alors :

- Equation du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,t}} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_1x_1}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_2x_2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_1x_2}} \\ = 0 \quad \forall t \in ]t_0, t_1[ \quad \forall (x_1, x_2) \in s \end{aligned}$$

- Conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit} \quad w(x_1, x_2, t) = 0 \\ \text{soit} \quad \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_1}} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_1x_1}} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_1x_2}} \right] n_1 + \\ \quad \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_2}} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_2x_2}} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_2x_1}} \right] n_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur la frontière } \Gamma \text{ et } \forall t \in ]t_0, t_1[$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit} \quad w_{,n}(x_1, x_2, t) = 0 \\ \text{soit} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_1x_1}} n_1^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_2x_2}} n_2^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x_1x_2}} n_1 n_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur la frontière } \Gamma \text{ et } \forall t \in ]t_0, t_1[$$

Ce qui donne, compte tenu de l'expression de  $\alpha$  dans notre cas présent :

- Equation du mouvement :

$$F_3 - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) w = 0 \quad \forall t \in ]t_0, t_1[ \quad \forall (x_1, x_2) \in s \quad (5.5)$$

**Nota Bene** : Dans la littérature, on trouve souvent les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu &= \rho h \quad \text{masse surfacique} \quad [kg.m^{-2}] \\ D &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} x_3^2 dx_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{rigidité de flexion} \quad [N.m] \\ \nabla^4 w &= \Delta(\Delta w) = \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) \quad \text{opérateur bi-laplacien} \end{aligned}$$

Avec ces notations, l'équation du mouvement 5.5 se ré-écrit :

$$F_3 - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - D \nabla^4 w = 0$$

**Remarque** : la valeur de  $D$  dépend du repère choisi par les bornes d'intégration (cf figure 5.1).

- Conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit} \quad w = 0 \\ \text{soit} \quad \left[ w_{,x_1x_1x_1} + (2-\nu)w_{,x_1x_2x_2} \right] n_1 + \left[ w_{,x_2x_2x_2} + (2-\nu)w_{,x_1x_1x_2} \right] n_2 = 0 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit} \quad w_{,n} = 0 \\ \text{soit} \quad w_{,x_1x_1} + w_{,x_2x_2} + (1-\nu) \left[ -w_{,x_2x_2} n_1^2 - w_{,x_1x_1} n_2^2 + 2w_{,x_1x_2} n_1 n_2 \right] = 0 \end{array} \right.$$

Une fois de plus, les conditions limites signifient que les hypothèses de déplacement faites conduisent à la construction d'une fonctionnelle de Hamilton qui n'a de solutions physiques que si ces conditions sont vérifiées en tout point du contour  $\Gamma$  de la plaque. Les conditions aux limites sont complexes à traduire en pratique. On ne traite donc analytiquement que des cas de géométries simples : plaques rectangulaires ou circulaires.

#### 5.4.2.4 Interprétation des conditions limites dans le cas d'une plaque rectangulaire

L'interprétation qui suit est donnée pour un point quelconque du périmètre  $x_1 = a$ , dans le cas d'une plaque rectangulaire. le vecteur  $\vec{n}$  a alors pour composantes :  $(1,0)$ . Les trois autres bords de cette plaque rectangulaire présentent chacun 4 relations de conditions limites similaires.

- $w(a, x_2) = 0$  et  $\frac{\partial w}{\partial x_2}(a, x_2) = 0$

Déplacement et pente nuls sur le bord  $x_1 = a$  : condition d'encastrement.

- $w(a, x_2) = 0$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(a, x_2) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(a, x_2) = 0$

La première condition  $w(a, x_2) = 0$  impose pour la seconde la forme :  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(a, x_2) = 0$ . Le terme  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(a, x_2)$  est proportionnel au moment de flexion sur le bord  $x_1 = a$  de la plaque. Cette condition de déplacement nul et de moment de flexion nul traduit une condition d'appui simple.

- $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(a, x_2) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(a, x_2) = 0$  et  $\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}(a, x_2) + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 x_2^2}(a, x_2) = 0$

Ces conditions traduisent respectivement un moment de flexion nul et un effort tranchant nul sur le bord  $x_1 = a$  de la plaque. Cette condition est une condition de bord libre.

- $\frac{\partial w}{\partial x_2}(a, x_2) = 0$  et  $\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}(a, x_2) + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 x_2^2}(a, x_2) = 0$

La première condition impose pour la seconde la forme  $\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}(a, x_2) = 0$ . Ces deux conditions traduisent une pente nulle et un effort tranchant nul sur le bord  $x_1 = a$  de la plaque. Il s'agit d'une condition de glissement.

## Bibliographie

R. D. Blevins, Formulas for natural frequency and mode shapes, Krieger, 2001

J.-L. Guyader, Vibrations des milieux continus, Hermes, 2002

A. Leissa, Vibration of plates, Acoustical Society of America, 1993

K.M. Liew, C.M. Wang, Y. Xiang et S. Kitiporchai, Vibration of Mindlin plates - programming the p-version Ritz Method, Elsevier, 1998

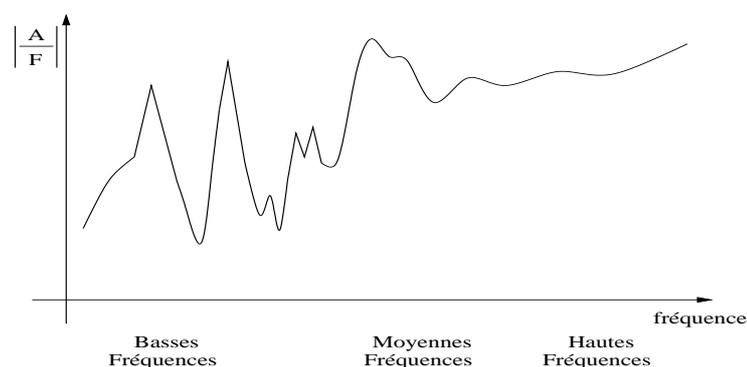
Y.Y. Yu, Vibrations of elastic plates : linear and nonlinear dynamical modelling of sandwiches, laminated composites, and piezoelectric layer, Springer, 1996

# 6 Introduction à l'analyse modale

Ce chapitre présente les fondements de l'analyse modale. Il est davantage conçu comme un formulaire plus qu'un cours à proprement dit et fait appel à des notions introduites ou rappelées dans les études précédentes (1 et  $n$  degré(s) de liberté).

## 6.1 Définition de l'analyse modale

L'analyse modale permet d'établir un modèle du comportement vibratoire d'une structure en basses fréquences. En identifiant par la mesure, les fréquences, vecteurs propres et amortissements modaux d'un système, on peut construire un modèle analytique qui pourra être employé en simulation pour connaître le comportement dynamique de ce système dans d'autres cas pratiques. En moyennes et hautes fréquences la densité de mode devient trop importante pour que cette méthode soit applicable. Ces considérations de moyennes et hautes fréquences dépendent du problème étudié : pour une simple poutre ou plaque, le domaine d'utilisation de l'analyse modale est beaucoup plus large que dans le cas d'une voiture ou d'un bateau par exemple.



L'analyse modale expérimentale est basée sur quelques hypothèses :

- Le système est linéaire dans la gamme des amplitudes étudiées.
- Le système, s'il est continu, peut se représenter par un système discret où les paramètres sont exprimés pour chaque noeud du maillage (nb de degré de liberté total = nb de noeuds  $\times$  nb de ddl par noeud).
- L'amortissement est supposé proportionnel.

Sur l'exemple de la figure 6.1, les mesures de Fonction de Réponse en Fréquence (FRF - rapport de l'accélération au point 1 sur la force au point 2 par exemple), vont permettre de déterminer les paramètres du système mécanique : fréquences et modes propres pour chaque résonance ainsi que les amortissements qui leur sont associés. Ces informations sont utiles à l'identification et au traitement des modes de vibration gênants de la portière lorsque la voiture roule par exemple.

## 6.2 Théorème de réciprocité

Ce théorème de réciprocité est fondamental dans le sens où il permet d'obtenir les mêmes FRF dans les deux cas suivant :

- Point de force en 2, point d'observation en 1.
- Point d'observation en 2, point de force en 1.

$$\frac{A_1(\omega)}{F_2(\omega)} = \frac{A_2(\omega)}{F_1(\omega)}$$

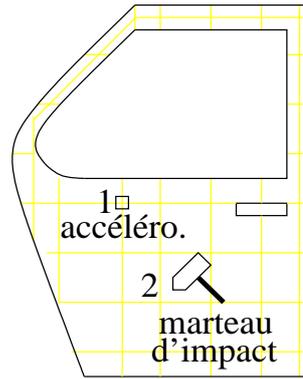


FIG. 6.1 – Maillage d'une portière avant étude modale

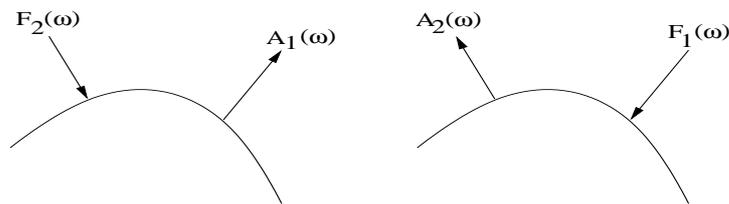


FIG. 6.2 – Illustration du théorème de réciprocité

Ainsi, dans le cas de la portière de voiture, déplacer le point d'impact sur le maillage en gardant un point de mesure de l'accélération fixe ou déplacer l'accéléromètre sur le maillage en gardant le point d'impact fixe nous fournira la même information utile.

### 6.3 Différentes formes de FRF

D'autres Fonctions de Réponse en Fréquence que le rapport accélération sur force peuvent être utilisées. Dans le tableau ci-dessous sont répertoriées quelques unes des FRF les plus courantes :

Déplacement $X$	$H = \frac{X}{F}$ Souplesse dynamique Compliance dynamique Receptance <i>Dynamic compliance</i>	$H = \frac{F}{X}$ Raideur dynamique <i>Dynamic stiffness</i>
Vitesse $V$	$H = \frac{V}{F}$ Mobilité <i>Mobility</i>	$H = \frac{F}{V}$ Impédance <i>Impedance</i>
Accélération $A$	$H = \frac{A}{F}$ Accélérance Inertance <i>Accelerance</i>	$H = \frac{F}{A}$ Masse effective <i>Effective mass</i>

### 6.4 Estimateurs de FRF

On ne mesure généralement jamais le rapport  $x(t)$ , signal d'entrée, sur  $y(t)$ , signal de sortie, sans traitement numérique préalable. Ce traitement numérique permet de limiter le bruit sur la mesure.

Les signaux sur lesquels se porte l'analyse sont dits des *estimateurs des fonctions de réponse en fréquence* :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1(f) &= \frac{\mathbf{Y} * \mathbf{X}}{\mathbf{X} * \mathbf{X}} \\ \mathbf{H}_2(f) &= \frac{\mathbf{Y} * \mathbf{Y}}{\mathbf{X} * \mathbf{Y}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1(f) &= \frac{\frac{1}{T} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* Y_i \right]}{\frac{1}{T} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^* X_i \right]} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \\ \mathbf{H}_2(f) &= \frac{\frac{1}{T} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^* Y_i \right]}{\frac{1}{T} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^* X_i \right]} = \frac{S_{yy}}{S_{yx}}\end{aligned}$$

où  $T$  est la période du signal,  $n$  son nombre d'échantillons et  $S_{xy}$  désigne l'interspectre des signaux  $X(t)$  et  $Y(t)$ .

$\mathbf{H}_2$  est le meilleur estimateur aux résonances : il annule le bruit à l'entrée et est moins sensibles aux *fuites spectrales* (leakage, problème inhérent au traitement du signal).

En revanche,  $\mathbf{H}_1$  est le meilleur estimateur aux anti-résonances, le problème dominant étant le bruit de sortie.

Pour des excitations par impacts ou pseudo-aléatoires,  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  sont généralement équivalents aux résonances.  $\mathbf{H}_1$  est cependant le meilleur estimateur aux anti-résonances.

En général, pour un bruit blanc en entrée,  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  forment les limites de confiance de la vraie valeur  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H}_1 \leq \mathbf{H} \leq \mathbf{H}_2$$

Cette inégalité n'est pas valable pour les fuites spectrales non linéaires ou pour les bruits cohérents à l'entrée et à la sortie tels que les ronflements dus au secteur.

On définit parfois un troisième estimateur,  $\mathbf{H}_3$ , moyenne des deux premiers estimateurs.

## 6.5 Amortissements visqueux et structural

Deux formes d'amortissement sont couramment rencontrées en pratique : l'amortissement visqueux,  $\xi$ , dont on a largement discuté dans le premier chapitre et l'amortissement structural (ou hystérétique),  $\eta$ , dépendant de la nature du matériau subissant l'effort.

Compte tenu de la nature de l'amortissement structural, sa prise en compte se fait par la définition d'une raideur complexe  $K$  :

$$K = K(1 + j\eta)$$

Comme pour l'amortissement visqueux, l'amortissement structural est en quadrature de phase avec le déplacement (terme multiplié par  $j$ ).

On peut établir la comparaison suivante entre les deux types d'amortissement :

Bilan des forces $[-M\omega^2 + K + j\omega C]\mathbf{X}e^{j\omega t} = \mathbf{F}e^{j\omega t}$	Bilan des forces $[-M\omega^2 + K(1 + j\eta)]\mathbf{X}e^{j\omega t} = \mathbf{F}e^{j\omega t}$
Souplesse dynamique (ou Receptance) $\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}} = \frac{1}{(K - M\omega^2) + j\omega C}$	Souplesse dynamique (ou Receptance) $\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}} = \frac{1}{(K - M\omega^2) + j\eta K}$
$\mathbf{H}(\omega)K = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}}K = \frac{1}{(1 - r^2) + j2\xi r}$	$\mathbf{H}(\omega)K = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}}K = \frac{1}{(1 - r^2) + j\eta r}$

où,  $r = \omega/\omega_n$  et où les termes en gras, du tableau ci dessus, représentent des nombres complexes.

L'amortissement contrôle l'amplitude à la résonance ( $\omega = \omega_r$ ), car à la résonance :

$$\mathbf{H}(\omega_r)K = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}}K = \frac{1}{j2\xi}$$

Pour deux systèmes ayant comme seule différence le type d'amortissement et en considérant des amplitudes égales à la résonance, on montre que l'amortissement structural est égal à deux fois l'amortissement visqueux :

$$\eta = 2\xi$$

## 6.6 Méthodes d'extraction de paramètres

Les identifications de la fréquence de résonance et de l'amortissement peuvent être faites, de façon simple mais avec de nombreuses hypothèses, par la méthode du pic d'amplitude (*cf* fig. 6.3)

On peut vérifier, qu'à la résonance, on observe pour tous types de FRF :

- un maximum d'amplitude
- un passage à zéro de partie réelle
- un maximum de la partie imaginaire

Une fois la pulsation (ou la fréquence) de résonance  $\omega_r$  déterminée, par son maximum d'amplitude  $A_{max}$ , on recherche les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour lesquelles les amplitudes du module de la FRF sont  $A_{max}/\sqrt{2}$ .  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  est appelée la bande passante à -3 dB.

Dans le cas d'un système à 1 ddl ou d'un système à n ddl pour lequel l'influence des autres résonances est négligeable sur le comportement de la résonance observée, l'amortissement se met sous la forme :

$$\eta = 2\xi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_r}$$

que l'on peut simplifier dans le cas d'un amortissement faible ( $\xi, \eta \ll 1$ )

$$\eta = 2\xi \simeq \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r} = 2\xi$$

**Nota Bene :**

- Le calcul à -3 dB peut facilement se généraliser à -n dB.
- La méthode présentée est en pratique très peu rigoureuse pour un système à n ddl (en raison des hypothèses faites). D'autres méthodes plus élaborées comme l'étude du cercle dans le plan de Nyquist au voisinage d'une résonance ("circle fitting") ou des méthodes considérant l'influence des autres résonances "MDOF curve fitting" lui sont préférées (*cf* [1,4]).

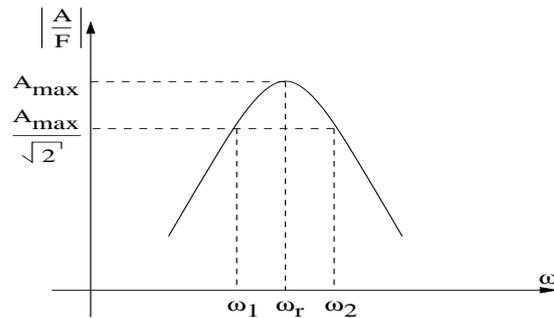


FIG. 6.3 – Zoom sur une résonance, méthode du pic d'amplitude

## 6.7 Exemple : cas d'une poutre en flexion

On prend ici l'exemple simple d'une poutre d'aluminium encastree-libre en flexion (Fig. 6.4). Les propriétés de la poutre ainsi que ses dimensions sont répertoriées à la table 6.1. On choisit de récupérer les accélérations en 3 points de cette poutre. Une excitation au point 1 et la mesure des accélérations nous permet de construire 3 FRF.

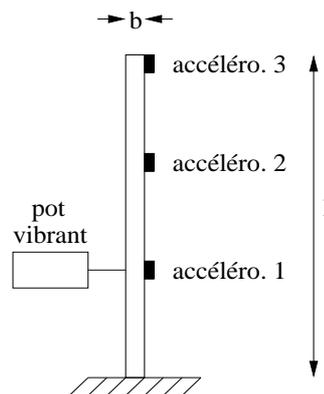


FIG. 6.4 – Schéma du dispositif expérimental

Module d'Young	Masse volumique	Longueur l	largeur b	épaisseur h
70 GPa	2740 kg.m <sup>-3</sup>	0.250 m	0.015 m	0.005 m

TAB. 6.1 – Propriétés et dimensions de la poutre.

### ■ Obtention des FRF

Les figures 6.5 et 6.6 présentent les 5 premières résonances de la poutre (qui en tant que milieu continu en possède théoriquement une infinité cf chapitre sur les poutres).

**Nota Bene** : Les FRF que l'on voit ici pour illustrer l'exemple sont simulées et non mesurées.

### ■ Détermination des fréquences propres et amortissements modaux

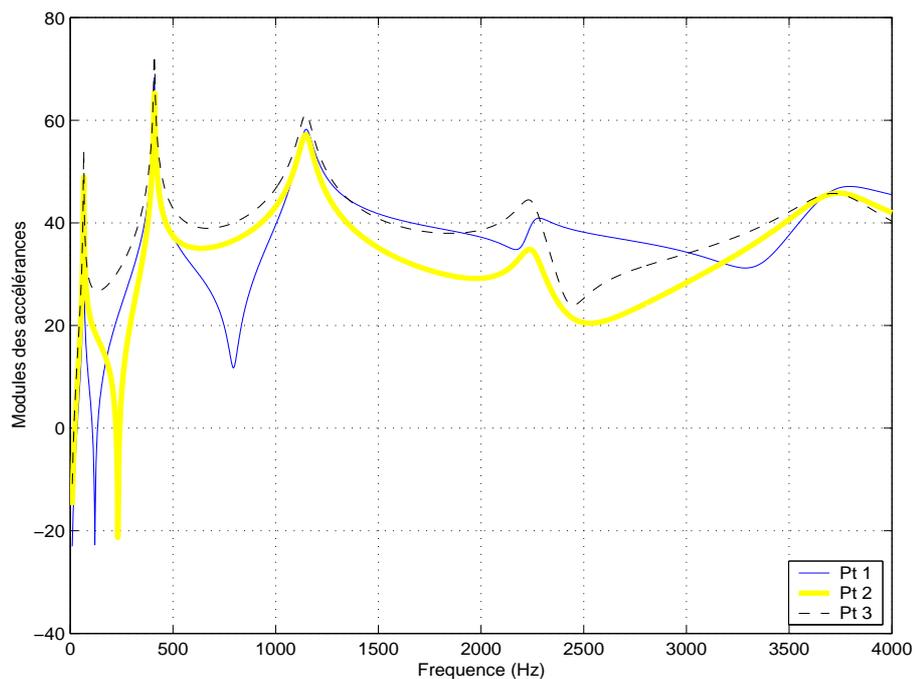


FIG. 6.5 – Modules des 3 FRF obtenues.

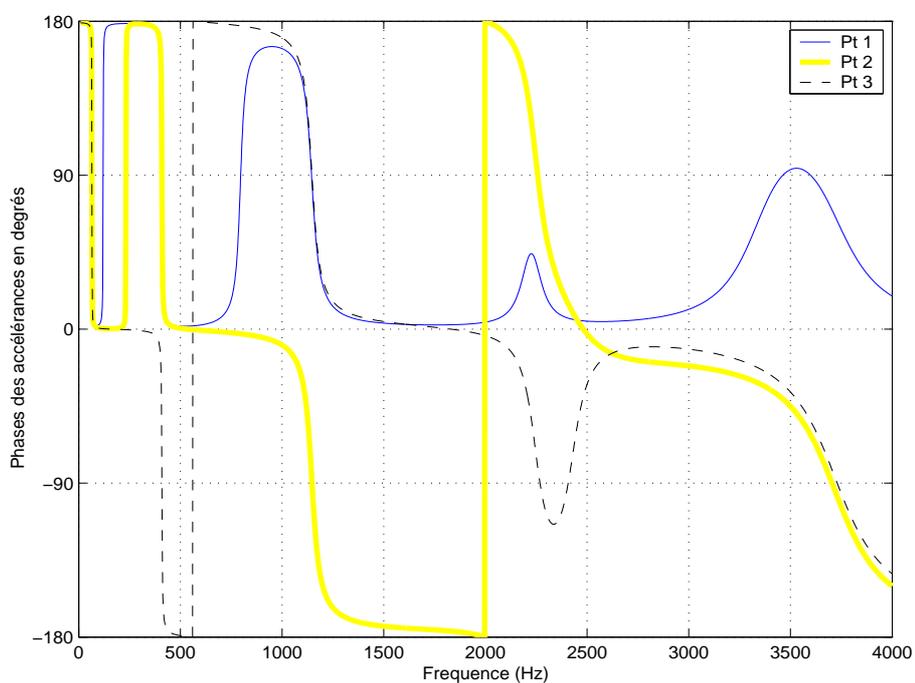


FIG. 6.6 – Phases des FRF.

En utilisant la méthode d'amplitude du pic pour les premiers modes (peu amortis) et une méthode plus avancée pour les derniers (méthode de recalage), on obtient comme fréquences propres et amortissements modaux

(vous pouvez tenter de le vérifier à partir des figures) :

$$\begin{aligned} f_1 &= 65.3Hz & \eta_1 &= 0.015 \\ f_2 &= 409.4Hz & \eta_2 &= 0.010 \\ f_3 &= 1146.2Hz & \eta_3 &= 0.050 \\ f_4 &= 2246.1Hz & \eta_4 &= 0.050 \\ f_5 &= 3712.9Hz & \eta_5 &= 0.100 \end{aligned}$$

#### ■ Détermination des déformées modales

Une fois les fréquences propres obtenues, on peut s'intéresser aux déformées de la poutre à ces fréquences de vibration particulières. Les amplitudes mesurées des 3 premières déformées propres sont :

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 1.09 \\ 2.00 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1.18 \\ 0.85 \\ -2.00 \end{bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 1.44 \\ -1.28 \\ 2.03 \end{bmatrix}$$

ce qui correspond graphiquement aux déformées modales présentées à la figure 6.7 où une normalisation par rapport à la longueur de la poutre à été faite.

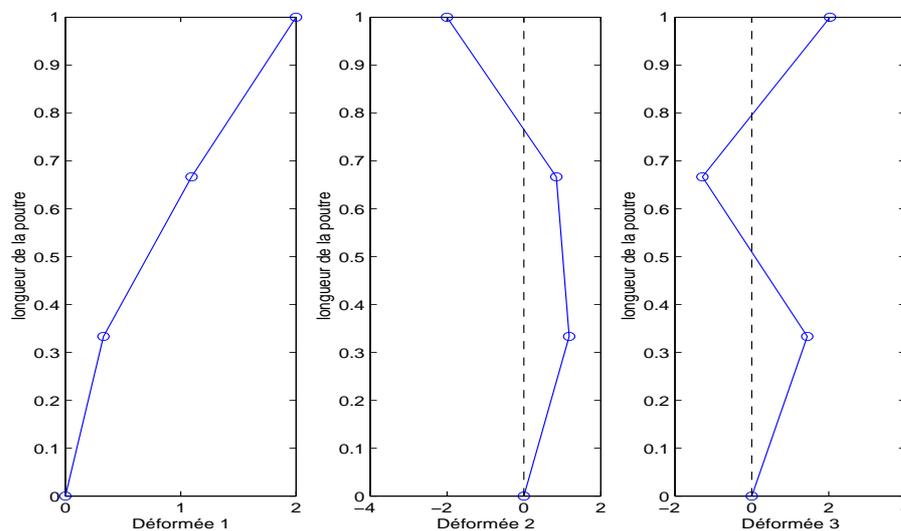


FIG. 6.7 – Estimation à partir des 3 points de mesure des 3 premières déformées modales.

## Références et bibliographie

L'analyse modale, dont on n'a fait qu'effleurer les possibilités, est une science à part entière. De nombreux ouvrages y sont consacrés, parmi lesquels on trouve :

- [1] D.J. Ewins, Modal testing : theory practice and application, Research studies press ltd, 1994
- [2] D.J. Inman, Engineering vibration, Prentice-Hall international, 1994
- [3] K.G. McConnel, Vibration testing : theory and practice, J. Wiley and Sons, 1995
- [4] A.D. Nashif, D.I.G. Jones, J.P. Henderson, Vibration damping, J. Wiley and Sons, 1985



# A Formalisme de Lagrange et équations d'Euler

## A.1 Rappel sur le formalisme de Lagrange

Soit  $L = T - V$  la fonction de Lagrange définie à partir de l'énergie cinétique  $T$  et de l'énergie potentielle  $V$ .  $L$  est une fonction  $L(q, \dot{q}, t)$  des coordonnées généralisées  $q$ , des vitesses généralisées  $\dot{q}$  et du temps  $t$ . On peut définir une fonctionnelle intégrale de la fonction de Lagrange entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$ , nommée action :

$$H = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (\text{A.1})$$

qui doit être extrémale (théorème de Hamilton ou théorème de moindre action), ie  $\delta H = 0$ .

Le théorème de Hamilton permet de remplacer les équations d'équilibre pour des milieux élastiques par une formulation variationnelle (extrémum d'une fonctionnelle). Il peut-être plus simple de faire de "bonnes" approximations sur la fonctionnelle de Hamilton que sur les équations d'équilibre d'où l'intérêt de la formulation variationnelle.

$$\begin{array}{ccc} \text{Equation d'équilibre} & \iff & \text{Extrémum d'une fonctionnelle d'énergie} \\ \text{(Newton)} & & \text{(Hamilton)} \end{array}$$

Le calcul d'extrémalisation peut être réalisé de deux façons :

- La méthode générale (et lourde) de calcul de la dérivée (au sens de Gateau) cf §A.2.1
- L'utilisation des équations d'Euler : équations donnant directement celles du mouvement et les conditions aux limites pour des fonctionnelles de formes générales données.

Les équations d'Euler appliquées à la fonction de Lagrange nous donnent, de façon générale :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{A.2})$$

En cas de forces extérieures  $Q_i$  et d'effets dissipatifs, les équations d'Euler-Lagrange deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{A.3})$$

$D$  étant une fonction dissipation (ou énergie dissipée).

## A.2 Equations d'Euler

### A.2.1 Fonctionnelle de Hamilton pour les vibrations longitudinales de poutres droites minces

Reprenons la fonctionnelle obtenue dans le cas des vibrations longitudinales des poutres minces (eq. 4.6) :

$$H(u_1^0) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} ES \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right)^2 + f_1 S u_1^0 \right] dx_1 dt$$

Cette fonctionnelle peut se mettre sous la forme :

$$H(u_1^0) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \alpha(u_1^0, u_{1,t}^0, u_{1,x_1}^0) dx_1 dt$$

Sa dérivée au sens de Gateau est :

$$\frac{d}{d\lambda} H(u_1^0 + \lambda v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{d}{d\lambda} \alpha(u_1^0 + \lambda v, u_{1,t}^0 + \lambda v_t, u_{1,x_1}^0 + \lambda v_{x_1}) dx_1 dt$$

Posons  $u = u_1^0 + \lambda v$  et utilisons la règle des dérivations composées :

$$\frac{d}{d\lambda} H(u_1^0 + \lambda v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u} v + \frac{\partial \alpha}{\partial u_t} v_t + \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1}} v_{x_1} \right) dx_1 dt$$

On intègre les deuxième et troisième termes par parties :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial \alpha}{\partial u_t} v_t dx_1 dt &= \underbrace{\left[ \int_0^l \frac{\partial \alpha}{\partial u_t} v dx_1 \right]_{t_0}^{t_1}}_A - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u_t} \right) v dx_1 dt \\ \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1}} v_{x_1} dx_1 dt &= \left[ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1}} v dt \right]_0^l - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1}} \right) v dx_1 dt \end{aligned}$$

ou le terme  $A$  s'annule puisque, par définition,  $v(x_1, t_0) = v(x_1, t_1) = 0$ .

Donc finalement :

$$\frac{d}{d\lambda} H(u_1^0 + \lambda v) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1}} \right) \right] v dx_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1}} v \right]_0^l dt \quad (\text{A.4})$$

et :

$$u_1^0(x_1, t) \text{ rend } H \text{ extrémale} \iff \frac{d}{d\lambda} H(u_1^0 + \lambda v) \Big|_{\lambda=0} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Si on effectue dans un premier temps des variations telles que  $v(0) = v(l) = 0$ , on aboutit à la condition :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u_1^0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,t}^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0} \right) = 0 \quad (\text{A.6})$$

c'est l'équation du mouvement, c'est aussi l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle

Compte tenu de A.6, A.5 devient :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0}(0, t) v(0, t) - \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0}(l, t) v(l, t) \right] dt = 0$$

Ce qui impose :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^0(0, t) = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0}(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1^0(l, t) = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0}(l, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

ce sont les conditions limites possibles en  $x_1 = 0$  et  $x_1 = l$ .

La démarche précédente effectuée dans le cas particulier de la fonctionnelle de Hamilton associée aux vibrations longitudinales de poutre (fonction de deux variables : temps et espace) peut-être généralisée à d'autres types de fonctionnelles.

## A.2.2 Autres formes de fonctions d'Euler

■ Extrémalisation d'une fonctionnelle à 2 fonctions du temps :

$$H(u_1, u_2) = \int_{t_0}^{t_1} \alpha(u_1, u_2, u_{1,t}, u_{2,t}) dt$$

La fonctionnelle  $H$  est extrémale si :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,t}} &= 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{2,t}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in ]t_0, t_1[$$

■ Extrémalisation d'une fonctionnelle à 1 fonction des deux variables temps et espace :

$$H(u) = \int_{t_0}^{t_1} \int_l^0 \alpha(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}) dx dt$$

La fonctionnelle  $H$  est extrémale si :

Equation du mouvement :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial u_x} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{xt}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{xx}} = 0$$

$$\forall t \in ]t_0, t_1[$$

$$\forall x \in ]0, l[$$

Conditions aux limites :

pour  $x = 0$  ou  $x = l$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } u(x, t) = 0 \\ \text{soit } \frac{\partial \alpha}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{xx}} = 0 \end{array} \right. \quad \forall t \in ]t_0, t_1[$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } u_x(x, t) = 0 \\ \text{soit } \frac{\partial \alpha}{\partial u_{xx}} = 0 \end{array} \right. \quad \forall t \in ]t_0, t_1[$$

■ Extrémalisation d'une fonctionnelle à 1 fonction de trois variables ( $x_1, x_2, t$ ) :

$$H(u) = \int_{t_0}^{t_1} \int_s \alpha(u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_t, u_{x_1 x_1}, u_{x_2 x_2}, u_{x_1 x_2}, u_{x_1 t}, u_{x_2 t}, u_{tt}) dx_1 dx_2 dt$$

La fonctionnelle  $H$  est extrémale si :

Equation du mouvement :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1}} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_2}}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1 x_1}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_2 x_2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1 x_2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1 t}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_2 t}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{tt}} = 0$$

$$\forall t \in ]t_0, t_1[ \quad \forall (x_1, x_2) \in s$$

Conditions aux limites :

pour  $x = 0$  ou  $x = l$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } u(x_1, x_2, t) = 0 \\ \text{soit } \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1}} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1 x_1}} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1 x_2}} \right] n_1 + \\ \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_2}} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_2 x_2}} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_2 x_1}} \right] n_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur la frontière } \Gamma \text{ et } \forall t \in ]t_0, t_1[$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } u_n(x_1, x_2, t) = 0 \\ \text{soit } \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1 x_1}} n_1^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_2 x_2}} n_2^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial u_{x_1 x_2}} n_1 n_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur la frontière } \Gamma \text{ et } \forall t \in ]t_0, t_1[$$

